Zum Isomorphieproblem von Darstellungsringen

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat.)

vorgelegt dem Rat der Fakultät für Mathematik und Informatik der
Friedrich-Schiller-Universität Jena

von Dipl.-Math. Michael Müller
geboren am 05.05.1976 in Worms

Gutachter
Prof. Dr. Burkhard Külshammer, Friedrich-Schiller-Universität Jena
Prof. Dr. Wolfgang Kimmerle, Universität Stuttgart

Tag der letzten Prüfung des Rigorosums: 02.10.2008
Tag der öffentlichen Verteidigung: 16.10.2008

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Darstellungstheorie endlicher Gruppen beschäftigt sich mit der Klassifikation der Ähnlichkeitsklassen von Darstellungen einer endlichen Gruppe G über einem Körper K. Äquivalent hierzu ist die Betrachtung der Isomorphieklassen von KG-Moduln. Hierbei bezeichnen wir mit KG die Gruppenalgebra der endlichen Gruppe G über dem Körper K. Die direkte Summe und das Tensorprodukt von KG-Moduln induzieren eine Addition und eine Multiplikation auf der Menge der Isomorphieklassen von KG-Moduln. Es bietet sich nun an, den daraus resultierenden Ring $A(KG)$, den sogenannten Greenring von KG, zu studieren. Im Fall $K = \mathbb{C}$ ist $A(KG)$ isomorph zum Charakterring $R(G)$ von G. Besitzt K positive Charakteristik, so sind auch Teilringe und Faktorringe von $A(KG)$, wie zum Beispiel der Trivial-Source-Ring oder der Grothendieckring, von Interesse. Desweiteren stehen der Burnsidering $B(G)$ und der Ring der monomialen Darstellungen $D(G)$ im Blickfeld der Betrachtung. Der Ring $B(G)$ wird durch die Isomorphieklassen endlicher G-Mengen erzeugt. Die Addition und die Multiplikation in $B(G)$ werden dabei durch disjunkte Vereinigung und direktes Produkt von G-Mengen induziert. Bei dem Ring $D(G)$ bilden die Isomorphieklassen unzerlegbarer Objekte aus der monomialen Kategorie $\mathbf{mon}_{\mathbb{C}G}$ eine $\mathbb{Z}$-Basis. Dabei sind die Objekte von $\mathbf{mon}_{\mathbb{C}G}$ Paare $(V, \mathcal{L})$, bestehend aus einem endlich erzeugten $\mathbb{C}G$-Modul V und einer Menge $\mathcal{L}$ von eindimensionalen Unterräumen, für die $\bigoplus_{L\in\mathcal{L}} L = V$ und $gL \in \mathcal{L}$ für alle $g \in G$ und alle $L \in \mathcal{L}$ gilt. Eine Addition zweier solcher Paare ist durch die direkte Summe der $\mathbb{C}G$-Moduln und die Vereinigung der Mengen der eindimensionalen Unterräume gegeben. Eine Multiplikation erhält man durch die Bildung der jeweiligen Tensorprodukte. Die Addition und Multiplikation auf $D(G)$ wird nun mittels dieser Verknüpfungen definiert. Ferner kann der Burnsidering $B(G)$ in $D(G)$ eingebettet werden. Die Bezeichnung $D(G)$ wurde zu Ehren von Andreas Dress gewählt, der sich mit diesen Ringen beschäftigte ([Dr71]).
Die beschriebenen Ringe sind sogenannte Darstellungsringe der Gruppe G. Die vorliegende Arbeit thematisiert Isomorphieprobleme solcher Ringe. Hierbei beschäftigt man sich mit der Frage, welche Informationen aus einem gegebenen Darstellungsring über die zugrunde liegende Gruppe gewonnen werden können. Motiviert werden solche Betrachtungen durch die Tatsache, dass nicht-isomorphe Gruppen isomorphe Darstellungsringe haben können. Beispielsweise gilt $R(D_8) \cong R(Q_8)$, wobei D_8 die Diedergruppe und Q_8 die Quaternionengruppe mit 8 Elementen ist. Dies ist dadurch begründet, dass die Gleichheit der Charaktertafeln die Isomorphie der Charakterringe impliziert. Umgekehrt erhält man aus der Isomorphie zweier Charakterringe die Gleichheit der Charaktertafeln ([Sa66]).
Auch für den Burnsidering können solche Gruppen angegeben werden ([Ki91], [Th88], [Br95]). Allerdings ist nicht bekannt, ob die Isomorphie zweier Burnsideringe die Gleichheit der Markentafeln impliziert.
In der vorliegenden Arbeit werden der Ring der monomialen Darstellungen und der Trivial-Source-Ring hinsichtlich der beschriebenen Thematik untersucht. Dabei werden bestimmte

Invarianten der jeweiligen Ringe benutzt, um Informationen über die zugrunde liegende Gruppe zu erhalten. Für den Ring der monomialen Darstellungen konnte allerdings kein Beispiel für nicht-isomorphe Gruppen G und $\tilde{G}$ gefunden werden, so dass $D(G) \cong D(\tilde{G})$ ist.
Im ersten Kapitel werden die notwendigen Grundlagen der Darstellungstheorie zusammengefasst. Desweiteren werden Green-Funktoren eingeführt und die Konstruktion sowie die elementaren Eigenschaften des Burnsideringes erläutert.
Das zweite Kapitel beschäftigt sich mit dem Ring der monomialen Darstellungen. Dabei werden zu Beginn des Abschnittes die Konstruktion des Ringes und dessen Spezies ausführlich beschrieben. Es wird daraufhin eine explizite Formel für die primitiven Idempotente von $\mathbb{Z}[\zeta]_{\mathfrak{p}} \otimes_{\mathbb{Z}} D(G)$ angegeben, wobei $\zeta \in \mathbb{C}$ eine primitive $|G|$-te Einheitswurzel und $\mathbb{Z}[\zeta]_{\mathfrak{p}}$ die Lokalisierung von $\mathbb{Z}[\zeta]$ bei einem Primideal $\mathfrak{p}$ ist.
Im dritten Unterkapitel werden die Führer der primitiven Idempotente von $\mathbb{Q}(\zeta) \otimes_{\mathbb{Z}} D(G)$, also die für jedes primitive Idempotent $e \in \mathbb{Q}(\zeta) \otimes_{\mathbb{Z}} D(G)$ kleinste natürliche Zahl $n_e \in \mathbb{N}$ mit $n_e \cdot e \in \mathbb{Z}[\zeta] \otimes_{\mathbb{Z}} D(G)$, berechnet. Als erste Anwendung dieser Berechnungen kann gezeigt werden, dass $D(G) \cong D(\tilde{G})$ die Gleicheit $|G| = |\tilde{G}|$ impliziert. Ferner ist die Kommutativität einer Gruppe G in $D(G)$ feststellbar. Desweiteren können Aussagen über Primteiler der Ordnung des Zentrums der zugrunde liegenden Gruppe gemacht werden. Am Ende dieses Unterkapitels wird ein Integralitätskriterium für Elemente des Ghostringes von $D(G)$ bewiesen, das Ergebnisse aus [Bo04] ergänzt.
Im darauffolgenden Abschnitt wird untersucht, ob sich Eigenschaften von Sylowgruppen einer Gruppe G auf eine Gruppe $\tilde{G}$ übertragen lassen, falls $D(G) \cong D(\tilde{G})$ gilt. Es wird unter anderem gezeigt, dass dies bei abelschen Sylowgruppen und bei zyklischen 2-Sylowgruppen der Fall ist.
Im fünften Unterkapitel wird gezeigt, dass die Isomorphie $D(G) \cong D(\tilde{G})$ bei Gruppen mit ungerader Ordnung die Isomorphie $B(G) \cong B(\tilde{G})$ impliziert.
Im darauffolgenden Abschnitt wird ein Struktursatz über die Gruppe der Torsionseinheiten von $D(G)$ bewiesen. Dieses Ergebnis ist angelehnt an entsprechende bekannte Ergebnisse des Burnsideringes ([Ma83]). Mit Hilfe dieses Satzes kann daraufhin gezeigt werden, dass eine abelsche Gruppe durch deren monomialen Darstellungsring eindeutig bestimmt ist. Aus $D(G) \cong D(\tilde{G})$ mit einer abelschen Gruppe G folgt also stets $G \cong \tilde{G}$.
Im achten Unterkapitel werden nilpotente und p-nilpotente Gruppen thematisiert. Zu Beginn dieses Abschnittes werden die monomialen Darstellungsringe der Gruppen der Ordnung p^3 sowie der Diedergruppen, Semidiedergruppen und Quaternionengruppen der Ordnung 2^n untersucht. Es wird dann gezeigt, dass sich Nilpotenz von G im Fall $D(G) \cong D(\tilde{G})$ auf $\tilde{G}$ überträgt. Ferner kann bewiesen werden, dass gegebenenfalls die Isomorphie $D(P) \cong D(\tilde{P})$ folgt, wobei P und $\tilde{P}$ die p-Sylowgruppen von G und $\tilde{G}$ sind. Desweiteren erhält man aus der Isomorphie $D(G) \cong D(\tilde{G})$ mit einer nilpotenten Gruppe G die Isomorphie $H/H' \cong \tilde{H}/\tilde{H}'$, wobei H und $\tilde{H}$ die jeweiligen $2'$-Hallgruppen von G und $\tilde{G}$ sind. Am Ende dieses Abschnittes wird gezeigt, dass sich p-Nilpotenz einer Gruppe G im Fall $D(G) \cong D(\tilde{G})$ auf $\tilde{G}$ überträgt, wenn die p-Sylowgruppen von G und $\tilde{G}$ zyklisch sind.
Im neunten Unterkapitel werden Gruppen, deren Sylowgruppen zyklisch sind, behandelt. Diese Gruppen werden Z-Gruppen genannt. Mit Hilfe der Führer der primitiven Idempotente von $\mathbb{Q}(\zeta) \otimes_{\mathbb{Z}} D(G)$ und der Torsionseinheiten von $D(G)$ kann gezeigt werden, dass aus $D(G) \cong D(\tilde{G})$ die Isomorphie $G \cong \tilde{G}$ folgt, wenn G und $\tilde{G}$ Z-Gruppen sind. Der Fall $B(G) \cong B(\tilde{G})$ für Z-Gruppen G und $\tilde{G}$ impliziert im allgemeinen nicht die Isomorphie von G und $\tilde{G}$. Dies wird an einem Beispiel erläutert.
Ebenfalls von Bedeutung für das Isomorphieproblem können Untersuchungen der Automor-

phismengruppe von $D(G)$ sein. Ist beispielsweise ein Isomorphismus $\alpha : D(\tilde{G}) \to D(G)$ gegeben, so kann dieser mit einem Automorphismus $\beta \in \mathrm{Aut}(D(G))$ zu einem Isomorphismus $\beta \circ \alpha : D(\tilde{G}) \to D(G)$ verknüpft werden. Man erhält also die Möglichkeit, den Isomorphismus α geeignet zu lenken. Dieses Prinzip führte bei einer äquivalenten Betrachtung beim Burnsidering dazu, dass man einen Isomorphismus $\gamma : B(G) \to B(\tilde{G})$ durch einen normalisierten Isomorphismus ersetzen kann ([Ra04]). Im zehnten Unterkapitel wird in Anlehnung an die Arbeit von D. M. Nicolson [Ni76] ein Automorphismus von $D(G)$ konstruiert.
Im dritten Kapitel wird der Trivial-Source-Ring $T^p(G)$ untersucht. Im Gegensatz zum Ring der monomialen Darstellungen fällt dieser Ring in den Bereich der modularen Darstellungstheorie. Es werden zunächst die grundlegenden Eigenschaften des Ringes geklärt, die Spezies konstruiert und die primitiven Idempotente von $\mathbb{Q}(\zeta) \otimes_{\mathbb{Z}} T^p(G)$ angegeben, wobei $\zeta \in \mathbb{C}$ eine primitive $|G|_{p'}$-te Einheitswurzel ist. Im dritten Unterkapitel werden mit Hilfe der Theorie der Scott-Moduln die Führer der primitiven Idempotente von $\mathbb{Q}(\zeta) \otimes_{\mathbb{Z}} T^p(G)$ berechnet. Hiermit wird gezeigt, dass die Isomorphie $T^p(G) \cong T^p(\tilde{G})$ die Gleichheit der Gruppenordnungen von G und $\tilde{G}$ impliziert.
Im letzten Unterkapitel wird gezeigt, dass genau dann $T^p(P \times H) \cong T^p(\tilde{P} \times \tilde{H})$ mit p-Gruppen $P, \tilde{P}$ und p'-Gruppen $H, \tilde{H}$ gilt, wenn $B(P) \cong B(\tilde{P})$ und $R(H) \cong R(\tilde{H})$ gilt. Insbesondere führt dies zu dem Ergebnis, dass für abelsche Gruppen G und $\tilde{G}$ die Isomorphie $T^p(G) \cong T^p(\tilde{G})$ die Isomorphie $G \cong \tilde{G}$ mit sich bringt.

Ich möchte mich bei meinem Betreuer Professor B. Külshammer für die interessante Aufgabenstellung und seine Unterstützung herzlich bedanken.

Kapitel 1

Grundlagen

In diesem Kapitel werden die Grundlagen für die vorliegende Arbeit zusammengestellt. Das erste Unterkapitel enthält eine kurze Einführung in die gewöhnliche und die modulare Darstellungstheorie. Dabei werden elementare Notationen, Definitionen und Sätze aufgeführt, die in den weiteren Ausführungen Verwendung finden. Im zweiten Unterkapitel werden Green-Funktoren definiert. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels werden die elementaren Eigenschaften des Burnsideringes behandelt.

1.1 Grundlagen der Darstellungstheorie

Es sei G eine endliche Gruppe. Wir schreiben $H \leq G$, falls H eine Untergruppe von G ist. Im Fall $H \leq G$ und $H \neq G$ verwenden wir die Bezeichnung $H < G$. Wir benutzen die Notation $H \trianglelefteq G$, falls H eine normale Untergruppe von G ist. Für Untergruppen $H, U \leq G$ schreiben wir $H =_G U$, falls H und U in G konjugiert sind, und $H \leq_G U$, wenn H zu U in G subkonjugiert ist. Wir verwenden die folgenden Notationen für konjugierte Elemente und konjugierte Untergruppen:

$$^gh = ghg^{-1},\ h^g = g^{-1}hg,\ {}^gH = gHg^{-1} \text{ und } H^g = g^{-1}Hg \quad (g, h \in G,\ H \leq G).$$

Es sei p eine Primzahl. Wir schreiben G_p für die Menge der p-Elemente und $G_{p'}$ für die Menge der p-regulären Elemente von G. Für $g \in G$ seien $g_p \in G_p$ und $g_{p'} \in G_{p'}$ die eindeutig bestimmten Elemente mit $g = g_p g_{p'} = g_{p'} g_p$. Wir bezeichnen mit G' die Kommutatorgruppe und mit $Z(G)$ das Zentrum von G.
Wir werden im folgenden einige Grundlagen der Darstellungstheorie formulieren, die in Lehrbüchern wie [CR] oder [Na] nachgelesen werden können. Es seien R ein kommutativer Ring mit Einselement und RG die Gruppenalgebra von G über R. Unter einem RG-Modul verstehen wir stets einen endlich erzeugten, als R-Modul freien RG-Linksmodul. Durch die Vorschrift

$$g * r := r \quad (g \in G,\ r \in R)$$

wird der Ring R selbst zu einem RG-Modul, dem *trivialen* RG-Modul. Es seien $H \leq G$ und M ein RH-Modul. Für $g \in G$ ist der *konjugierte* $R[{}^gH]$-Modul ${}^gM$ definiert durch

$$({}^gh) * m := h \cdot m \quad (h \in H,\ m \in M).$$

Dabei gilt ${}^{g'}({}^gM) = {}^{g'g}M$ für $g, g' \in G$. Ist $g \in H$, so ist ${}^gM$ ein RH-Modul, und es gilt ${}^gM \simeq M$. Ist N ein RG-Modul, so erhalten wir durch *Restriktion* von G auf H, also durch

Einschränkung der Skalarmultiplikation auf RH, einen RH-Modul, den wir mit $\mathrm{res}_H^G N$ bezeichnen. Die *Induktion* liefert aus einem gegebenen RH-Modul M den induzierten RG-Modul

$$\mathrm{ind}_H^G M := RG \otimes_{RH} M.$$

In der folgenden Bemerkung werden die elementaren Eigenschaften von Restriktion und Induktion zusammengefasst.

Bemerkung 1.1.1 *Es seien $K \leq H \leq G$, $U \leq G$, L ein RK-Modul, M ein RH-Modul, N ein RG-Modul, V ein RU-Modul und $g \in G$. Dann gilt:*

(i) $\mathrm{res}_K^H(\mathrm{res}_H^G N) = \mathrm{res}_K^G N$ *und* ${}^g(\mathrm{res}_K^H M) = \mathrm{res}_{{}^gK}^{{}^gH}({}^gM)$,

(ii) $\mathrm{ind}_H^G(\mathrm{ind}_K^H L) \simeq \mathrm{ind}_K^G L$ *und* ${}^g(\mathrm{ind}_K^H L) \simeq \mathrm{ind}_{{}^gK}^{{}^gH}({}^gL)$,

(iii) $N \otimes_R \mathrm{ind}_H^G M \simeq \mathrm{ind}_H^G(\mathrm{res}_H^G N \otimes_R M)$,

(iv) $\mathrm{res}_U^G(\mathrm{ind}_H^G M) \simeq \bigoplus_{UtH \in U\backslash G/H} \mathrm{ind}_{{}^tH\cap U}^U(\mathrm{res}_{{}^tH\cap U}^{{}^tH}({}^tM))$,

(v) $\mathrm{ind}_U^G V \otimes_R \mathrm{ind}_H^G M \simeq \bigoplus_{UtH \in U\backslash G/H} \mathrm{ind}_{{}^tU\cap H}^G(\mathrm{res}_{{}^tU\cap H}^{{}^tU}({}^tV) \otimes_R \mathrm{res}_{{}^tU\cap H}^H M)$.

In Teil (iv) und (v) sind die sogenannten *Mackey-Formeln* aufgeführt (siehe [Na], Kap. 3, Thm. 1.9, Thm. 1.17).

Ist $H \trianglelefteq G$ und M ein $R[G/H]$-Modul, so wird durch

$$g * m := gH \cdot m \quad (g \in G,\ m \in M)$$

ein RG-Modul definiert. Dieses Konstruktionsprinzip nennt sich *Inflation*, und der daraus resultierende RG-Modul wird mit $\mathrm{inf}_H^G M$ bezeichnet.

Eine *R-Darstellung* einer R-Algebra A ist ein R-Algebra-Homomorphismus

$$\Lambda : A \to \mathrm{Mat}_n(R).$$

Unter einer *R-Darstellung* von G verstehen wir einen Gruppen-Homomorphismus

$$\Delta : G \to \mathrm{GL}_n(R).$$

Dabei ist $n \in \mathbb{N}$ der *Grad* der jeweiligen Darstellung. Setzt man Δ linear fort auf die Gruppenalgebra RG, so erhält man eine R-Darstellung von RG. Umgekehrt erhält man durch Einschränkung einer R-Darstellung von RG auf G eine R-Darstellung von G. Damit entsprechen sich R-Darstellungen von G und RG.
Es sei Λ eine Darstellung von RG mit Grad $n \in \mathbb{N}$. Ist M ein freier R-Modul mit Basis $b_1, ..., b_n$, so wird durch $g \cdot b_j := \sum_{i=1}^n \Lambda(g)_{ij} b_i$ $(g \in G,\ j = 1, ..., n)$ ein RG-Modul definiert. Ist umgekehrt M ein RG-Modul mit R-Basis $b_1, ..., b_n$, und ist $g \cdot b_j = \sum_{i=1}^n \lambda_{ij}(g) b_i$ mit $\lambda_{ij}(g) \in R$ für $g \in G$, $j = 1, ..., n$, so erhält man durch $\Delta(g) := (\lambda_{ij}(g)) \in \mathrm{GL}_n(R)$ eine R-Darstellung Δ von G. Also korrespondieren die R-Darstellungen von G mit den RG-Moduln.
Zwei R-Darstellungen $\Delta_1 : G \to \mathrm{GL}_n(R)$ und $\Delta_2 : G \to \mathrm{GL}_m(R)$ heißen *ähnlich*, wenn $m = n$ ist und $S \in \mathrm{GL}_n(R)$ existiert mit $\Delta_1(g) = S \cdot \Delta_2(g) \cdot S^{-1}$ für alle $g \in G$.

Bemerkung 1.1.2 *Die Ähnlichkeitsklassen von R-Darstellungen von G und die Isomorphieklassen von RG-Moduln entsprechen sich.*

Die obige Bemerkung verdeutlicht, dass die Untersuchung von Ähnlichkeitsklassen von Darstellungen einer Gruppe G äquivalent zur Untersuchung der Isomorphieklassen von RG-Moduln ist. Wir nehmen dies zum Anlass, einen Darstellungsring, den sogenannten Greenring, zu definieren, um an einigen Stellen im weiteren Kontext auf diesen Ring Bezug nehmen zu können. Eine ausführliche Besprechung des Greenringes befindet sich in den Büchern [CR] und [Be]. Wir können die Menge der Isomorphieklassen von RG-Moduln mit einer Ringstruktur versehen. Dazu setzen wir voraus, dass in RG der Satz von Krull-Schmidt-Azumaya gilt, das heißt, dass für jeden RG-Modul eine Zerlegung in eine direkte Summe von endlich vielen unzerlegbaren RG-Moduln existiert, die bis auf Reihenfolge und Isomorphie eindeutig ist. Für einen RG-Modul M bezeichnen wir mit $[M]$ die Isomorphieklasse von M. Der *Greenring* $A(RG)$ ist der von den Isomorphieklassen von RG-Moduln bezüglich der Relation

$$[M] + [N] = [M \oplus N]$$

erzeugte $\mathbb{Z}$-Modul, wobei die Multiplikation durch

$$[M] \cdot [N] = [M \otimes_R N]$$

für RG-Moduln M, N definiert ist. Damit ist $A(RG)$ ein kommutativer Ring mit der Isomorphieklasse des trivialen RG-Moduls $[R]$ als Einselement. Da in RG der Satz von Krull-Schmidt-Azumaya gilt, ist $A(RG)$ ein freier $\mathbb{Z}$-Modul, dessen Basis aus den Isomorphieklassen der unzerlegbaren RG-Moduln besteht. Insbesondere ist genau dann $[M] = [N]$ in $A(RG)$ für RG-Moduln M, N, wenn $M \simeq N$ ist. Es sei $A_0(RG)$ das Ideal von $A(RG)$, das von allen Elementen der Form

$$[M] + [N] - [L]$$

erzeugt wird, wobei

$$0 \to M \to L \to N \to 0$$

eine exakte Sequenz von RG-Moduln ist. Der Faktorring $C(RG) := A(RG)/A_0(RG)$ heißt *Grothendieckring* von RG. Für einen RG-Modul M bezeichnen wir mit $[[M]] := [M] + A_0(RG)$ das entsprechende Element in $C(RG)$.

Wir werden im folgenden einige Grundlagen der Charaktertheorie behandeln, die ausführlich in [CR] oder [Na] nachgelesen werden können. Es seien K ein Körper und $\Delta : G \to \mathrm{GL}_n(K)$ eine K-Darstellung von G. Die Abbildung

$$\chi : G \to K, \quad g \mapsto \mathrm{Spur}(\Delta(g))$$

heißt *K-Charakter* von Δ. Ist der Grad der K-Darstellung gleich 1, so ist der entsprechende K-Charakter ein Gruppenhomomorphismus. In diesem Fall sprechen wir von einem *linearen K-Charakter*. Ein K-Charakter ist stets konstant auf den Konjugationsklassen einer Gruppe, ist also eine Klassenfunktion. Weiterhin haben ähnliche K-Darstellungen den gleichen K-Charakter. Nach Bemerkung 1.1.2 können wir einem KG-Modul M einen eindeutig bestimmten K-Charakter χ_M zuordnen. Es sei $\{M_1, ..., M_s\}$ ein Vertretersystem der Isomorphieklassen einfacher KG-Moduln. Dann ist

$$\mathrm{Irr}(KG) := \{\chi_{M_1}, ..., \chi_{M_s}\}$$

die Menge der *irreduziblen K-Charaktere*. Der zum trivialen KG-Modul K korrespondierende K-Charakter wird *trivialer K-Charakter* genannt. Für KG-Moduln L, M und N mit $L \subseteq M$ gilt

$$\chi_M = \chi_{M/L} + \chi_L \quad \text{und} \quad \chi_{M \otimes_K N} = \chi_M \cdot \chi_N.$$

Da jeder KG-Modul eine Kompositionsreihe besitzt, setzt sich jeder K-Charakter als endliche Summe von irreduziblen K-Charakteren zusammen.

Wir betrachten nun die Situation $K = \mathbb{C}$. Gegebenenfalls schreiben wir anstatt $\mathbb{C}$-Charakter nur Charakter und benutzen für $\mathrm{Irr}(\mathbb{C}G)$ die Bezeichnung $\mathrm{Irr}(G)$. Ferner ist die Anzahl der irreduziblen Charaktere gleich der Anzahl der Konjugationsklassen von G. Der Ring $R(G) := \mathbb{Z}[\mathrm{Irr}(G)]$ aller $\mathbb{Z}$-Linearkombinationen irreduzibler Charaktere heißt der Ring der *virtuellen Charaktere* oder *Charakterring* von G. Da $\mathrm{Irr}(G)$ linear unabhängig über $\mathbb{C}$ ist, ist $R(G)$ ein freier $\mathbb{Z}$-Modul mit Basis $\mathrm{Irr}(G)$. Nach dem Satz von Maschke ist $\mathbb{C}G$ halbeinfach. Damit ist $[M_1], ..., [M_s]$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $A(\mathbb{C}G)$, und durch $A(\mathbb{C}G) \to R(G)$, $[M_i] \mapsto \chi_{M_i}$ wird ein Ringisomorphismus definiert.
Wichtige Rechenregeln für Charaktere sind gegeben durch die erste Orthogonalitätsrelation

$$\sum_{g \in G} \varphi(g)\psi(g^{-1}) = \begin{cases} |G| & \text{falls } \varphi = \psi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für $\varphi, \psi \in \mathrm{Irr}(G)$ und die zweite Orthogonalitätsrelation

$$\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(h)\chi(k^{-1}) = \begin{cases} |C_G(h)| & \text{falls } h =_G k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für $h, k \in G$. Von großer Bedeutung für diese Arbeit sind die linearen Charaktere von G. Nun ist jeder lineare Charakter von G ein Gruppenhomomorphismus $G \to \mathbb{C}^\times$. Umgekehrt wird für $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$ der triviale $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}$ durch $g * c := \varphi(g) \cdot c$ ($g \in G$, $c \in \mathbb{C}$) zu einem einfachen $\mathbb{C}G$-Modul, der mit $\mathbb{C}_\varphi$ bezeichnet wird. Dann ist $\chi_{\mathbb{C}_\varphi} = \varphi$. Also ist $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$ genau die Menge der linearen Charaktere von G. Wir benutzen künftig die Bezeichnung $\hat{G} := \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$.

Bemerkung 1.1.3 *(i) Ist $H \leq G$, so ist $\hat{H}_0 := \{\varphi_{|H} : \varphi \in \hat{G}\}$ eine Untergruppe von $\hat{H}$ mit $\hat{H}_0 \cong HG'/G'$. Für $\psi \in \hat{H}_0$ setzen wir $A_\psi := \{\varphi \in \hat{G} : \varphi_{|H} = \psi\}$. Dann ist $|A_\psi| = (G : HG')$.*

(ii) Für $H \leq G$, $\psi \in \hat{H}_0$, $g \in G$ gilt $\sum_{\varphi \in A_\psi} \varphi(g) = \begin{cases} (G : HG')\psi(g) & \textit{falls } gG' \in HG'/G' \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$

Teil (i) der obigen Bemerkung kann man beweisen, indem man $\hat{H}_0$ mit $\widehat{HG'/G'}$ identifiziert. Dies ist wegen $\varphi_{|G'} = 1$ für alle $\varphi \in \hat{G}$ möglich. Man kann dann die Theorie über irreduzible Charaktere abelscher Gruppen benutzen, wie sie beispielsweise in [Hu], Kap. V, §6 zu finden ist. Teil (ii) erhält man mit Hilfe der zweiten Orthogonalitätsrelation, indem man berücksichtigt, dass $A_\psi = \{\lambda \cdot \tau \ : \ \tau \in A_1\}$ für ein beliebiges $\lambda \in A_\psi$ ist, und A_1 mit $\widehat{G/HG'}$ identifiziert.
Es sei p eine Primzahl. Wir werden nun einige Grundlagen der modularen Darstellungstheorie aufführen, die ebenfalls ausführlich in den Büchern [CR] und [Na] behandelt werden. Ein

p-modulares System ist ein Tripel $(K, \mathcal{O}, F)$, bestehend aus einem diskreten Bewertungsring $\mathcal{O}$, seinem Quotientenkörper K und dem Restklassenkörper $F := \mathcal{O}/\mathfrak{m}$ der Charakteristik p, wobei $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von $\mathcal{O}$ ist. Ist eine Gruppe G gegeben, so sprechen wir von einem *passenden* p-modularen System, wenn $\mathrm{char}(K) = 0$ ist, $\mathcal{O}$ ein vollständiger diskreter Bewertungsring ist, der eine primitive $|G|$-te Einheitswurzel enthält und F algebraisch abgeschlossen ist. In den folgenden Ausführungen werden wir stets ein passendes p-modulares System zugrunde legen.
Es sei $f : \mathcal{O} \to F$ der Restklassenhomomorphismus. Ist $\xi \in \mathcal{O}$ eine primitive $|G|_{p'}$-te Einheitswurzel, so ist $f : \langle \xi \rangle \to \langle f(\xi) \rangle$ ein Isomorphismus der zyklischen Gruppen. Für einen FG-Modul M sei $\Delta : G \to \mathrm{GL}_n(F)$ eine zugehörige Darstellung. Wir definieren

$$\psi_M : G_{p'} \to \mathcal{O}, \quad g \mapsto \sum_{i=1}^{n} f^{-1}(\bar{\xi}_i),$$

wobei $\bar{\xi}_1, ..., \bar{\xi}_n$ die Eigenwerte von $\Delta(g)$ sind. Die Abbildung ψ_M heißt *Brauercharakter* von M und ist eine Klassenfunktion der p-regulären Konjugationsklassen von G. Ist $\{L_1, ..., L_t\}$ ein Repräsentantensystem der Isomorphieklassen einfacher FG-Moduln, so ist

$$\mathrm{IBr}(G) := \{\psi_{L_1}, ..., \psi_{L_t}\}$$

die Menge der *irreduziblen Brauercharaktere* von G. Ferner gilt für FG-Moduln L, M und N mit $L \subseteq M$

$$\psi_{M/L} + \psi_L = \psi_M \quad \text{und} \quad \psi_M \cdot \psi_N = \psi_{M \otimes_F N}.$$

Also lässt sich jeder Brauercharakter als Summe irreduzibler Brauercharaktere schreiben. Nun ist $\mathrm{IBr}(G)$ linear unabhängig über K. Damit ist der Ring $R^p(G) := \mathbb{Z}[\mathrm{IBr}(G)]$ aller $\mathbb{Z}$-Linearkombinationen irreduzibler Brauercharaktere ein freier $\mathbb{Z}$-Modul mit Basis $\mathrm{IBr}(G)$. Der Ring $R^p(G)$ heißt *Brauercharakterring* von G.
Es sei N ein FG-Modul mit einer Kompositionsreihe $0 \subseteq N_0 \subseteq N_1 \subseteq ... \subseteq N_r = N$. Da die Sequenz $0 \to N_{i-1} \to N_i \to N_i/N_{i-1} \to 0$ exakt ist für alle $i \in \{1, ..., r\}$, ist

$$[[N]] = \sum_{i=1}^{r} [[N_i/N_{i-1}]] \quad \text{in } C(FG).$$

Also ist $\{[[L_i]] : i = 1, ..., t\}$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $C(FG)$, und durch $C(FG) \to R^p(G)$, $[[M]] \mapsto \psi_M$ ist ein Ring-Isomorphismus definiert.

Es seien $R \in \{\mathcal{O}, F\}$ und $H \leq G$. Mit R_H bezeichnen wir den trivialen RH-Modul R. Für RG-Moduln M und N schreiben wir $M \mid N$, falls M isomorph zu einem direkten Summanden von N ist. Ein RG-Modul M heißt *H-projektiv*, wenn ein RH-Modul L existiert mit $M \mid \mathrm{ind}_H^G L$. Ist $\mathcal{U}$ eine Menge von Untergruppen von G, so heißt ein RG-Modul M *$\mathcal{U}$-projektiv*, falls es zu jedem unzerlegbaren direkten Summanden L von M ein $U \in \mathcal{U}$ gibt, so dass L U-projektiv ist. Ein *Vertex* eines unzerlegbaren RG-Moduls M ist eine Untergruppe $D \leq G$, so dass M D-projektiv, aber nicht U-projektiv für jede echte Untergruppe $U < D$ ist. Eine *Quelle* von M ist ein unzerlegbarer RD-Modul V mit $M \mid \mathrm{ind}_D^G V$, wobei D ein Vertex von M ist. Es gelten die folgenden elementaren Eigenschaften:

Bemerkung 1.1.4 *Es seien $H \leq G$, M ein unzerlegbarer RG-Modul und L ein unzerlegbarer RH-Modul.*

(i) *Ein Vertex von M ist eine p-Untergruppe von G und ist bis auf Konjugation in G eindeutig bestimmt. Wir bezeichnen einen Vertex von M künftig mit* $\mathrm{vtx}(M)$.

(ii) *Ist* $M \mid \mathrm{ind}_H^G L$, *so ist* $\mathrm{vtx}(M) \leq_G \mathrm{vtx}(L)$. *Ist* $L \mid \mathrm{res}_H^G M$, *so ist* $\mathrm{vtx}(L) \leq_G \mathrm{vtx}(M)$.

(iii) *Es sei D ein Vertex von M, und die RD-Moduln V und W seien Quellen von M. Dann existiert $g \in N_G(D)$ mit ${}^gV \simeq W$. Ferner ist D ein Vertex von V und W.*

(iv) *Es sei $P \leq G$ eine p-Untergruppe. Der triviale RP-Modul R_P hat Vertex P.*

(v) *Ist $P \trianglelefteq G$ eine normale p-Untergruppe, so hat jeder unzerlegbare Summand von* $\mathrm{ind}_P^G R_P$ *Vertex P.*

(Teil (i),(ii) und (iii) : [Na], Kap. 4, Thm. 3.3, Lem. 3.4, Thm. 3.6, Teil (iv), (v) : [CR], Lem. 81.15).

Mit Hilfe der *Green-Korrespondenz* können Zusammenhänge zwischen unzerlegbaren RG-Moduln und unzerlegbaren RH-Moduln für Untergruppen H von G aufgezeigt werden. Für eine p-Untergruppe $P \leq G$ und eine Untergruppe $H \leq G$ mit $N_G(P) \leq H$ setzen wir

$$\begin{aligned}\mathcal{X} :=& \{Q \ : \ Q = P \cap {}^gP,\ g \in G \backslash H\},\\ \mathcal{Y} :=& \{Q \ : \ Q = H \cap {}^gP,\ g \in G \backslash H\},\\ \mathcal{Z} :=& \{Q \ : \ Q \leq P,\ Q \nleq_G X \text{ für alle } X \in \mathcal{X}\}.\end{aligned}$$

Bemerkung 1.1.5 (Green-Korrespondenz) *Es existiert eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen unzerlegbarer RG-Moduln mit Vertex in $\mathcal{Z}$ und den Isomorphieklassen unzerlegbarer RH-Moduln mit Vertex in $\mathcal{Z}$. Ist M ein unzerlegbarer RG-Modul mit Vertex in $\mathcal{Z}$ und L ein unzerlegbarer RH-Modul, der zu M korrespondiert, so ist* $\mathrm{vtx}(M) =_G \mathrm{vtx}(L)$, *und es gilt*

$$\mathrm{res}_H^G M \simeq L \oplus Y \quad \textit{und} \quad \mathrm{ind}_H^G L \simeq M \oplus X,$$

wobei Y ein $\mathcal{Y}$-projektiver RH-Modul und X ein $\mathcal{X}$-projektiver RG-Modul ist.

(Siehe [CR], 20.6). In der folgenden Bemerkung wird ein Kriterium über Unzerlegbarkeit induzierter Moduln angegeben.

Bemerkung 1.1.6 (Unzerlegbarkeitskriterium von Green) (i) *Es seien $H \trianglelefteq G$ und G/H eine p-Gruppe. Ist L ein unzerlegbarer FH-Modul, so ist* $\mathrm{ind}_H^G L$ *ein unzerlegbarer FG-Modul.*

(ii) *Es seien G eine p-Gruppe, $H \leq G$ und L ein unzerlegbarer FH-Modul. Dann ist* $\mathrm{ind}_H^G L$ *ein unzerlegbarer FG-Modul.*

(Siehe [CR], Thm. 19.22, Cor. 19.24). Teil (ii) der Bemerkung ist eine unmittelbare Konsequenz aus Teil (i).

1.2 Green-Funktoren und Subfunktoren

Um die Rechenregeln für Konjugation, Restriktion und Induktion in den Darstellungsringen übersichtlich zu formulieren, werden wir an dieser Stelle den Begriff eines *Green-Funktors* einführen.
Es seien R ein kommutativer Ring mit Einselement und G eine endliche Gruppe. Ein *R-Konjugations-Funktor* (*R-Algebra-Konjugations-Funktor*) auf G ist ein Paar (X, c), bestehend aus einer Familie von R-Moduln (R-Algebren) $X(H)$, $H \leq G$, und einer Familie von R-Modul-Homomorphismen (R-Algebra-Homomorphismen)

$$c_{g,H} : X(H) \to X({}^gH) \quad (H \leq G,\ g \in G),$$

die folgende Axiome erfüllen:

(C1) $c_{h,H} = \mathrm{id}_{X(H)}$

(C2) $c_{g'g,H} = c_{g',{}^gH} \circ c_{g,H}$

für alle $h \in H \leq G$ und $g, g' \in G$. Die Abbildung $c_{g,H}$ heißt *Konjugationsabbildung*.

Ein *R-Restriktions-Funktor* (*R-Algebra-Restriktions-Funktor*) auf G ist ein Tripel (A, c, res), bestehend aus einem R-Konjugations-Funktor (R-Algebra-Konjugations-Funktor) (A, c) auf G und einer Familie von R-Modul-Homomorphismen (R-Algebra-Homomorphismen)

$$\mathrm{res}^H_K : A(H) \to A(K) \quad (K \leq H \leq G),$$

die folgende Axiome erfüllen:

(R1) $\mathrm{res}^H_H = \mathrm{id}_{A(H)}$

(R2) $\mathrm{res}^K_L \circ \mathrm{res}^H_K = \mathrm{res}^H_L$

(R3) $c_{g,K} \circ \mathrm{res}^H_K = \mathrm{res}^{{}^gH}_{{}^gK} \circ c_{g,H}$

für alle $L \leq K \leq H \leq G$ und $g \in G$. Die Abbildung res^H_K heißt *Restriktionsabbildung*.

Ein *R-Mackey-Funktor* auf G ist ein Quadrupel $(M, c, \mathrm{res}, \mathrm{ind})$, bestehend aus einem R-Restriktionsfunktor (M, c, res) und einer Familie von R-Modul-Homomorphismen

$$\mathrm{ind}^H_K : M(K) \to M(H) \quad (K \leq H \leq G),$$

die folgende Axiome erfüllen:

(M1) $\mathrm{ind}^H_H = \mathrm{id}_{M(H)}$

(M2) $\mathrm{ind}^H_K \circ \mathrm{ind}^K_L = \mathrm{ind}^H_L$

(M3) $c_{g,H} \circ \mathrm{ind}^H_K = \mathrm{ind}^{{}^gH}_{{}^gK} \circ c_{g,K}$

(M4) $\mathrm{res}^H_U \circ \mathrm{ind}^H_K = \sum_{UhK \in U\backslash H/K} \mathrm{ind}^U_{U\cap {}^hK} \circ \mathrm{res}^{{}^hK}_{U\cap {}^hK} \circ c_{h,K}$ (Mackey-Formel) für alle $L \leq K \leq H \leq G$, $U \leq H$ und $g \in G$. Die Abbildung ind_K^H heißt *Induktionsabbildung.*

Ein R-*Green-Funktor* auf G ist ein R-Mackey-Funktor $(M, c, \mathrm{res}, \mathrm{ind})$ auf G, so dass $M(H)$ für alle $H \leq G$ eine R-Algebra ist, die Konjugations- und Restriktionsabbildungen R-Algebra-Homomorphismen sind, und die folgenden Axiome erfüllt sind:

(M5) $x \cdot \mathrm{ind}_K^H(y) = \mathrm{ind}_K^H(\mathrm{res}_K^H(x) \cdot y)$

(M6) $\mathrm{ind}_K^H(y) \cdot x = \mathrm{ind}_K^H(y \cdot \mathrm{res}_K^H(x))$ (Frobenius-Axiome)

für alle $K \leq H \leq G$, $x \in M(H)$ und $y \in M(K)$.

Beispielsweise bilden die Charakterringe $R(H)$, $H \leq G$, zusammen mit den üblichen Konjugations-, Restriktions- und Induktionsabbildungen einen $\mathbb{Z}$-Green-Funktor auf G. Bezeichnet man für $H \leq G$ mit $R^{ab}(H)$ den Teilring von $R(H)$, der durch die linearen Charaktere von H erzeugt wird, so erhält man einen $\mathbb{Z}$-Algebra-Restriktionsfunktor R^{ab} auf G. Eine ausführliche Besprechung der Green-Funktoren sowie weitere Beispiele befinden sich in [Bo98]. Im nächsten Unterkapitel werden wir einen weiteren $\mathbb{Z}$-Green-Funktor kennenlernen.

1.3 Der Burnsidering

Wir werden in diesem Abschnitt den Burnsidering $B(G)$ der endlichen Gruppe G einführen. Desweiteren werden die Spezies von $B(G)$, die primitiven Idempotente von $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} B(G)$ und deren Führer sowie die primitiven Idempotente von $\mathbb{Z}_\pi \otimes_{\mathbb{Z}} B(G)$ angegeben, wobei π eine Primzahlmenge ist. Eine ausführliche Darstellung der Thematik befindet sich in [CR], §80 und [Ka], Kapitel 15. Auf die Einheitengruppe von $B(G)$ soll hier nicht eingegangen werden. Diesbezüglich wird auf [Ma83] und [Ka] verwiesen.
Es sei G eine endliche Gruppe. Eine G-*Menge* ist eine endliche Menge S, auf der G als Permutationsgruppe operiert. Dabei heißt S *transitiv*, falls G transitiv auf S operiert. Ein G-*Homomorphismus* $f : S \to T$ von G-Mengen S und T ist eine Abbildung mit der Eigenschaft $f(gs) = gf(s)$ für alle $g \in G$ und alle $s \in S$. Ein G-*Isomorphismus* ist ein bijektiver G-Homomorphismus. Mit $[S]$ bezeichnen wir die Isomorphieklasse einer G-Menge S. Für jede Untergruppe $H \leq G$ wird die Menge der Linksnebenklassen G/H durch Linksmultiplikation zu einer transitiven G-Menge. Dabei ist G/H genau dann als G-Menge isomorph zu G/U für $U \leq G$, wenn H und U in G konjugiert sind. Ist $\mathcal{C}(G)$ ein Vertretersystem der Konjugationsklassen der Untergruppen von G, so ist $\{G/H : H \in \mathcal{C}(G)\}$ ein Vertretersystem der Isomorphieklassen aller transitiven G-Mengen. Der *Burnsidering* ist der von den Isomorphieklassen von G-Mengen bezüglich der Relation

$$[S] + [T] = [S \uplus T] \quad (S, T\ G\text{-Mengen})$$

erzeugte $\mathbb{Z}$-Modul, wobei durch

$$[S] \cdot [T] := [S \times T] \quad (S, T\ G\text{-Mengen})$$

eine Multiplikation auf $B(G)$ definiert ist. Damit ist $B(G)$ ein kommutativer Ring mit Einselement $[G/G]$. Nun ist jede G-Menge eindeutig als disjunkte Vereinigung ihrer G-Bahnen darstellbar. Da jede G-Bahn eine transitive G-Menge ist, ist $B(G)$ ein freier $\mathbb{Z}$-Modul mit Basis

$$\mathcal{B}(G) := \{[G/H] : H \in \mathcal{C}(G)\}.$$

Insbesondere ist genau dann $[S] = [T]$ in $B(G)$ für zwei G-Mengen S und T, wenn $S \cong T$ ist. Für $H, U \leq G$ ist das Produkt von $[G/H]$ und $[G/U]$ gegeben durch

$$[G/H] \cdot [G/U] = \sum_{HgU \in H \backslash G/U} [G/{}^g H \cap U].$$

Für einen kommutativen Ring R mit Einselement und $H \leq G$ setzen wir

$$B_R(H) := R \otimes_{\mathbb{Z}} B(H).$$

Für $U \leq H \leq G$ und $g \in G$ ist die *Konjugationsabbildung* $c_{g,H}$ definiert durch

$$\begin{aligned} c_{g,H} : B_R(H) &\to B_R({}^g H) \\ [H/V] &\mapsto [{}^g H/{}^g V]\,, \end{aligned}$$

die *Restriktionsabbildung* res_U^H ist definiert durch

$$\begin{aligned} \mathrm{res}_U^H : B_R(H) &\to B_R(U) \\ [H/V] &\mapsto \sum_{UhV \in U\backslash H/V} [U/U \cap {}^h V], \end{aligned}$$

und die *Induktionsabbildung* ind_U^H ist definiert durch

$$\begin{aligned} \mathrm{ind}_U^H : B_R(U) &\to B_R(H) \\ [U/V] &\mapsto [H/V]\,. \end{aligned}$$

Die Konjugations- und Restriktionsabbildungen sind R-Algebra-Homomorphismen, die Induktionsabbildungen sind im allgemeinen nur mit der Addition verträglich. Mit diesen drei Operationen wird B_R zu einem R-Greenfunktor auf G (siehe [Bo98]).

Die Ringhomomorphismen $B(G) \to \mathbb{Z}$ sind die Spezies von $B(G)$. Diese werden auf folgende Weise konstruiert. Für eine G-Menge S und eine Untergruppe $H \leq G$ bezeichnen wir mit S^H die H-Fixpunkte von S. Durch

$$\begin{aligned} s_H^{B(G)} : B(G) &\to \mathbb{Z} \\ [S] &\mapsto |S^H| \quad (S\ G\text{-Menge}) \end{aligned}$$

erhält man für jede Untergruppe $H \leq G$ einen Ringhomomorphismus, den sogenannten *Burnside-Homomorphismus.* Für $H, U \leq G$ ist

$$s_H^{B(G)}([G/U]) = (N_G(U) : U) n(H, U),$$

wobei $n(H, U)$ die Anzahl der G-Konjugierten von U ist, die H enthalten. Ferner gilt $s_H^{B(G)} = s_U^{B(G)}$ für $H, U \leq G$ genau dann, wenn H und U in G konjugiert sind. Die Spezies von $B(G)$ sind nun genau die Burnside-Homomorphismen $\{s_H^{B(G)} : H \in \mathcal{C}(G)\}$ (siehe [Bo01]). Es seien $H, U \leq G$ und π_H der durch

$$\begin{aligned} \pi_H : B(H) &\to \mathbb{Z} \\ [H/V] &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } H = V \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

definierte Ringhomomorphismus. Beachtet man, dass für $x \in G$ genau dann $H \leq {}^xU$ ist, wenn $HxU = xU$ ist, so folgt

$$\pi_H(\mathrm{res}^G_H([G/U])) = \pi_H(\sum_{HgU \in H\backslash G/U} [H/H \cap {}^gU]) = \sum_{\substack{HgU \in H\backslash G/U \\ H \leq {}^gU}} 1 = \sum_{\substack{gU \in G/U \\ H \leq {}^gU}} 1$$
$$= (N_G(U) : U)n(H, U) = s^{B(G)}_H([G/U]).$$

Also ist

$$s^{B(G)}_H = \pi_H \circ \mathrm{res}^G_H. \tag{1.1}$$

Die Abbildung

$$s^{B(G)} := \prod_{H \in \mathcal{C}(G)} s^{B(G)}_H : B(G) \to \mathbb{Z}^{|\mathcal{C}(G)|}$$

ist ein Ringmonomorphismus. Die $|\mathcal{C}(G)| \times |\mathcal{C}(G)|$-Matrix, deren Spalten aus den Bildern $s^{B(G)}([G/H])$ $(H \in \mathcal{C}(G))$ besteht, heißt *Markentafel* oder *Speziestafel* von $B(G)$.
Der Ring $B_{\mathbb{Q}}(G)$ ist ein halbeinfacher Ring, der isomorph zu $\mathbb{Q}^{|\mathcal{C}(G)|}$ ist. Setzt man die Spezies auf natürliche Weise auf $B_{\mathbb{Q}}(G)$ fort, so sind die primitiven Idempotente von $B_{\mathbb{Q}}(G)$ genau die Elemente $e^{B(G)}_H \in B_{\mathbb{Q}}(G)$ $(H \leq G)$, für die

$$s^{B(G)}_U(e^{B(G)}_H) = \begin{cases} 1 & \text{falls } U =_G H \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt. Eine explizite Formel für $e^{B(G)}_H$ ist gegeben durch

$$e^{B(G)}_H = \frac{1}{|N_G(H)|} \sum_{U \leq H} |U|\mu(U, H)[G/U] \tag{1.2}$$

(siehe [Gl81]). Dabei ist

$$\mu : \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G) \to \mathbb{Z}$$

die durch $\sum_{H \leq K \leq U} \mu(H, K) = 0$ für $H < U$, $\mu(H, H) = 1$ und $\mu(H, U) = 0$ für $H \nleq U$ $(H, U \in \mathcal{V}(G))$ rekursiv definierte *Möbius-Funktion*, wobei $\mathcal{V}(G)$ der Untergruppenverband von G ist.
Wichtige Invarianten des Burnsideringes sind die sogenannten *Führer* der primitiven Idempotente von $B_{\mathbb{Q}}(G)$. Der Führer eines primitiven Idempotentes $e^{B(G)}_H \in B_{\mathbb{Q}}(G)$ ist die kleinste natürliche Zahl $n_H \in \mathbb{N}$ mit $n_H e^{B(G)}_H \in B(G)$. Für $H \leq G$ ist der Führer von $e^{B(G)}_H$ gegeben durch

$$n_H = (N_G(H) : H)(H : H')_0$$

(siehe [Ni76]). Dabei ist n_0 das Produkt der verschiedenen Primteiler einer Zahl $n \in \mathbb{N}$, falls $n \neq 1$ ist, und $n_0 = 1$ im Fall $n = 1$. Wir nennen n_0 den *quadratfreien Anteil* von n.
Es sei π eine Menge von Primzahlen und $S^\pi(G)$ die kleinste normale Untergruppe von G, so dass $G/S^\pi(G)$ eine auflösbare π-Gruppe ist. Für $\pi = \emptyset$ setzen wir $S^\pi(G) = G$. Die Gruppe G heißt *π-perfekt*, falls $S^\pi(G) = G$ ist. Wir setzen

$$\mathbb{Z}_\pi := \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0,\ p \nmid b \text{ für alle } p \in \pi\},$$

und für eine π-perfekte Untergruppe $H \leq G$ setzen wir

$$S^\pi(G,H) := \{[G/U] \in \mathcal{B}(G) : S^\pi(U) = H\}$$

und

$$e_H^{B(G),\pi} := \sum_{[G/U]\in S^\pi(G,H)} e_U^{B(G)}.$$

Dann ist $\{e_H^{B(G),\pi} : H \leq G,\ H\ \pi\text{-perfekt}\}$ die Menge der primitiven Idempotente von $B_{\mathbb{Z}_\pi}(G)$ (siehe [Yo80]).

Kapitel 2

Der Ring der monomialen Darstellungen

Der Ring $D(G)$ der monomialen Darstellungen einer endlichen Gruppe G wurde bereits von Andreas Dress in [Dr71] untersucht. Die Theorie dieser Ringe hat sich in Zusammenhang mit Induktionssätzen als nützlich erwiesen ([Bo90], [Sn]). Desweiteren wurde der Ring $D(G)$ in [Ba04], [Bo01], [Bo04], [Fo04] und [Fo05] behandelt.

2.1 Definitionen und Eigenschaften

Es sei G eine endliche Gruppe. Wir bezeichnen mit $\mathbf{mon}_{\mathbb{C}G}$ die *monomiale Kategorie*. Die Objekte von $\mathbf{mon}_{\mathbb{C}G}$ sind Paare $(V, \mathcal{L})$, wobei V ein endlich erzeugter $\mathbb{C}G$-Modul und $\mathcal{L}$ eine Menge eindimensionaler Unterräume von V mit der Eigenschaft $\bigoplus_{L\in\mathcal{L}} L = V$ und $gL \in \mathcal{L}$ für alle $g \in G$ und alle $L \in \mathcal{L}$ ist. Dabei ist ein Morphismus $f : (V, \mathcal{L}) \to (W, \mathcal{M})$ von $\mathbf{mon}_{\mathbb{C}G}$ ein Homomorphismus $f : V \to W$ von $\mathbb{C}G$-Moduln, so dass für alle $L \in \mathcal{L}$ ein $M \in \mathcal{M}$ existiert mit $f(L) \subseteq M$. Morphismen aus $\mathbf{mon}_{\mathbb{C}G}$ werden gemäß der Hintereinanderausführung der entsprechenden $\mathbb{C}G$-Modul-Homomorphismen verknüpft. Zwei Objekte $(V, \mathcal{L})$ und $(W, \mathcal{M})$ sind *isomorph*, wenn ein Morphismus $f : (V, \mathcal{L}) \to (W, \mathcal{M})$ aus $\mathbf{mon}_{\mathbb{C}G}$ existiert, so dass der entsprechende $\mathbb{C}G$-Modul-Homomorphismus ein Isomorphismus ist. Für $(V, \mathcal{L}), (W, \mathcal{M})$ aus $\mathbf{mon}_{\mathbb{C}G}$ erhält man durch

$$(V, \mathcal{L}) \oplus (W, \mathcal{M}) := (V \oplus W, \mathcal{L} \cup \mathcal{M})$$

eine Addition und durch

$$(V, \mathcal{L}) \otimes (W, \mathcal{M}) := (V \otimes_{\mathbb{C}} W, \{L \otimes_{\mathbb{C}} M : L \in \mathcal{L}, M \in \mathcal{M}\})$$

eine Multiplikation auf der monomialen Kategorie. Ein Objekt $(V, \mathcal{L})$ aus $\mathbf{mon}_{\mathbb{C}G}$ mit $V \neq 0$ heißt *unzerlegbar* in $\mathbf{mon}_{\mathbb{C}G}$, wenn für Objekte $(V_1, \mathcal{L}_1)$ und $(V_2, \mathcal{L}_2)$ aus $\mathbf{mon}_{\mathbb{C}G}$ mit $(V, \mathcal{L}) \cong (V_1, \mathcal{L}_1) \oplus (V_2, \mathcal{L}_2)$ stets $V_1 = 0$ oder $V_2 = 0$ folgt.
Für ein Objekt $(V, \mathcal{L})$ aus $\mathbf{mon}_{\mathbb{C}G}$ sei $[V, \mathcal{L}]$ die Isomorphieklasse von $(V, \mathcal{L})$. Der *Ring der monomialen Darstellungen* $D(G)$ ist der von den Isomorphieklassen der Objekte von $\mathbf{mon}_{\mathbb{C}G}$ bezüglich der Relation

$$[V, \mathcal{L}] + [W, \mathcal{M}] = [(V, \mathcal{L}) \oplus (W, \mathcal{M})]$$

erzeugte $\mathbb{Z}$-Modul, wobei die Multiplikation durch

$$[V,\mathcal{L}]\cdot[W,\mathcal{M}] := [(V,\mathcal{L})\otimes(W,\mathcal{M})]$$

für Objekte $(V,\mathcal{L})$ und $(W,\mathcal{M})$ aus $\mathbf{mon}_{\mathbb{C}G}$ definiert ist. Damit ist $D(G)$ ein kommutativer Ring mit Einselement $[\mathbb{C},\{\mathbb{C}\}]$. Ferner ist $D(G)$ als $\mathbb{Z}$-Modul frei, wobei die Isomorphieklassen der unzerlegbaren Objekte aus $\mathbf{mon}_{\mathbb{C}G}$ eine $\mathbb{Z}$-Basis bilden (siehe [Fo04], Satz 2.1.1).
Man kann die unzerlegbaren Objekte aus $\mathbf{mon}_{\mathbb{C}G}$ folgendermaßen beschreiben:

Satz 2.1.1 *(i) Es seien $H\le G$ und $\varphi\in\hat{H}$. Dann ist*

$$(\mathrm{ind}_H^G\mathbb{C}_\varphi,\{g\otimes\mathbb{C}_\varphi : g\in G\})$$

ein unzerlegbares Objekt in $\mathbf{mon}_{\mathbb{C}G}$.

(ii) Es seien $H,U\le G$, $\varphi\in\hat{H}$ und $\psi\in\hat{U}$. Die Objekte

$$(\mathrm{ind}_H^G\mathbb{C}_\varphi,\{g\otimes\mathbb{C}_\varphi : g\in G\}) \text{ und } (\mathrm{ind}_U^G\mathbb{C}_\psi,\{g\otimes\mathbb{C}_\psi : g\in G\})$$

sind genau dann isomorph, wenn ein $g\in G$ mit ${}^gH=U$ und ${}^g\varphi=\psi$ existiert. Dabei ist ${}^g\varphi\in\widehat{{}^gH}$ definiert durch ${}^g\varphi({}^gh):=\varphi(h)$ für $h\in H$.

(iii) Jedes unzerlegbare Objekt in $\mathbf{mon}_{\mathbb{C}G}$ ist isomorph zu einem Objekt

$$(\mathrm{ind}_H^G\mathbb{C}_\varphi,\{g\otimes\mathbb{C}_\varphi : g\in G\})$$

für ein $H\le G$ und ein $\varphi\in\hat{H}$.

Beweis: Siehe [Fo04], Abschnitt 2.1. □

Das Objekt $(\mathrm{ind}_H^G\mathbb{C}_\varphi,\{g\otimes\mathbb{C}_\varphi : g\in G\})$ wird künftig durch das *monomiale Paar* (H,φ) dargestellt. Wir bezeichnen mit

$$\mathcal{M}(G) := \{(H,\varphi) : H\le G,\ \varphi\in\hat{H}\}$$

die Menge der monomialen Paare von G und definieren durch ${}^g(H,\varphi):=({}^gH,{}^g\varphi)$ eine Operation von G auf $\mathcal{M}(G)$. Wir schreiben $(H,\varphi)\le(U,\psi)$ für $(H,\varphi),(U,\psi)\in\mathcal{M}(G)$, falls $H\le U$ und $\psi_{|H}=\varphi$ ist. Wir erhalten damit eine partielle Ordnung auf $\mathcal{M}(G)$. Wir bezeichnen mit $[H,\varphi]_G$ die G-Bahn von $(H,\varphi)\in\mathcal{M}(G)$ unter dieser Operation und setzen

$$\mathcal{M}(G)/G := \{[H,\varphi]_G : (H,\varphi)\in\mathcal{M}(G)\}.$$

Ferner sei

$$N_G(H,\varphi) := \{g\in G : {}^g(H,\varphi)=(H,\varphi)\}$$

der Stabilisator von $(H,\varphi)\in\mathcal{M}(G)$ in G. Es gilt $H\le N_G(H,\varphi)\le N_G(H)$ für $(H,\varphi)\in\mathcal{M}(G)$.
Nach Satz 2.1.1 können wir die Isomorphieklassen der unzerlegbaren Objekte in $\mathbf{mon}_{\mathbb{C}G}$ mit den Elementen von $\mathcal{M}(G)/G$ identifizieren. Der Ring $D(G)$ ist nun die freie abelsche Gruppe, die von den Isomorphieklassen $[H,\varphi]_G\in\mathcal{M}(G)/G$ erzeugt wird, wobei die Multiplikation der Basiselemente durch

$$[H,\varphi]_G\cdot[U,\psi]_G = \sum_{HgU\in H\backslash G/U}[H\cap{}^gU,\varphi_{|H\cap{}^gU}\cdot{}^g\psi_{|H\cap{}^gU}]_G$$

für $[H,\varphi]_G, [U,\psi]_G \in \mathcal{M}(G)/G$ gegeben ist. Insbesondere ist $D(G)$ endlich erzeugt.
Für einen kommutativen Ring R mit Einselement und $H \leq G$ setzen wir

$$D_R(H) := R \otimes_{\mathbb{Z}} D(H).$$

Es seien $K \leq H \leq G$ und $g \in G$. Die *Konjugationsabbildung* $c_{g,H}$ ist definiert durch

$$\begin{aligned} c_{g,H} : D_R(H) &\to D_R({}^gH) \\ [U,\varphi]_H &\mapsto [{}^gU, {}^g\varphi]_{{}^gH}\,, \end{aligned}$$

die *Restriktionsabbildung* res^H_K ist definiert durch

$$\begin{aligned} \mathrm{res}^H_K : D_R(H) &\to D_R(K) \\ [U,\varphi]_H &\mapsto \sum_{KhU \in K\backslash H/U} [K \cap {}^hU, {}^h\varphi_{|K\cap {}^hU}]_K, \end{aligned}$$

und die *Induktionsabbildung* ind^H_K ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathrm{ind}^H_K : D_R(K) &\to D_R(H) \\ [U,\varphi]_K &\mapsto [U,\varphi]_H\,. \end{aligned}$$

Bei den Konjugations- und Restriktionsabbildungen handelt es sich um R-Algebra-Homomorphismen. Die Induktionsabbildungen sind Homomorphismen der additiven Gruppen. Zusammen mit diesen Operationen wird D_R zu einem R-Green-Funktor auf G (siehe [Bo01], [Fo04]).

Für $H \leq G$ lässt sich der Burnsidering $B(H)$ durch

$$\begin{aligned} \eta_H : B(H) &\to D(H) \\ [H/U] &\mapsto [U,1]_H \end{aligned} \tag{2.1}$$

in $D(H)$ einbetten. Weiterhin ist durch

$$\begin{aligned} \tau_H : D(H) &\to B(H) \\ [U,\psi]_H &\mapsto [H/U] \end{aligned} \tag{2.2}$$

eine Projektion von $D(H)$ auf $B(H)$ definiert. Dabei gilt $\tau_H \circ \eta_H = \mathrm{id}_{B(H)}$. Die Konjugations-, Restriktions- und Induktionsabbildungen sind mit diesen Abbildungen verträglich, es gilt also

$$c_{g,H} \circ \eta_H = \eta_{{}^gH} \circ c_{g,H}, \quad \mathrm{res}^G_H \circ \eta_G = \eta_H \circ \mathrm{res}^G_H, \quad \mathrm{ind}^G_H \circ \eta_H = \eta_G \circ \mathrm{ind}^G_H \tag{2.3}$$

und

$$c_{g,H} \circ \tau_H = \tau_{{}^gH} \circ c_{g,H}, \quad \mathrm{res}^G_H \circ \tau_G = \tau_H \circ \mathrm{res}^G_H, \quad \mathrm{ind}^G_H \circ \tau_H = \tau_G \circ \mathrm{ind}^G_H \tag{2.4}$$

für $H \leq G$ und $g \in G$.

2.2 Spezies und Idempotente

Es sei G eine endliche Gruppe. Eine Spezies von $D(G)$ ist ein Ringhomomorphismus $D(G) \to \mathbb{C}$. Wir werden im folgenden die Menge aller Spezies von $D(G)$ konstruieren. Für $g \in G$ definieren wir zunächst den Ringhomomorphismus

$$\begin{array}{rcl} t_g : R(G) & \to & \mathbb{C} \\ \varphi & \mapsto & \varphi(g). \end{array}$$

Weiterhin erhalten wir für $H \leq G$ durch

$$\begin{array}{rcl} \pi_H : D(H) & \to & R(H/H') \\ {[U,\psi]_G} & \mapsto & \begin{cases} \bar{\psi} & \text{falls } U = H \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \end{array} \tag{2.5}$$

einen Ringhomomorphismus, wobei $\bar{\psi} \in \widehat{H/H'}$ durch $\bar{\psi}(hH') := \psi(h)$ für $h \in H$ definiert ist. Wir setzen

$$\mathcal{D}(G) := \{(H, hH') : H \leq G,\ h \in H\}$$

und definieren durch ${}^g(H, hH') := ({}^gH, {}^gh{}^gH')$ für $g \in G$ eine Operation von G auf $\mathcal{D}(G)$. Wir schreiben $[H, hH']_G$ für die G-Bahn von $(H, hH') \in \mathcal{D}(G)$ unter dieser Operation und setzen

$$\mathcal{D}(G)/G := \{[H, hH']_G : (H, hH') \in \mathcal{D}(G)\}.$$

Wir bezeichnen mit

$$N_G(H, hH') := \{g \in G : {}^g(H, hH') = (H, hH')\}$$

den Stabilisator von $(H, hH') \in \mathcal{D}(G)$ in G. Dann ist $N_G(H, hH')$ eine Untergruppe von G mit

$$H \leq HC_G(H) \leq N_G(H, hH') \leq N_G(H).$$

Für jedes Element $(H, hH') \in \mathcal{D}(G)$ ist durch

$$s^{D(G)}_{(H,hH')} := t_{hH'} \circ \pi_H \circ \mathrm{res}^G_H : D(G) \to D(H) \to R(H/H') \to \mathbb{C}$$

ein Ringhomomorphismus definiert. Dabei sind die Bilder der Elemente $[U, \psi]_G \in \mathcal{M}(G)/G$ durch

$$s^{D(G)}_{(H,hH')}([U, \psi]_G) = \sum_{\substack{gU \in G/U \\ H \leq {}^gU}} {}^g\psi(h) \tag{2.6}$$

gegeben. In [Bo01] wurde gezeigt, dass man durch diese Konstruktion alle Spezies von $D(G)$ erhält. Insbesondere ist genau dann $s^{D(G)}_{(H,hH')} = s^{D(G)}_{(U,uU')}$, wenn $[H, hH']_G = [U, uU']_G$ ist. Damit stehen die Spezies von $D(G)$ in 1-1-Korrespondenz mit den Elementen aus $\mathcal{D}(G)/G$.
Wir werden im folgenden einige elementare Eigenschaften der Spezies aufzeigen. Es sei $\tilde{G}$ eine weitere endliche Gruppe und $f : \tilde{G} \to G$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann erhält man durch

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{res}_f : D(G) & \to & D(\tilde{G}) \\ {[H,\varphi]_G} & \mapsto & \displaystyle\sum_{f(\tilde{G})gH \in f(\tilde{G})\backslash G/H} \left[f^{-1}({}^gH), {}^g\varphi \circ f_{|f^{-1}({}^gH)}\right]_{\tilde{G}} \end{array}$$

einen Ringhomomorphismus (siehe [Bo01], 1.4). Weiterhin gilt

$$s^{D(\tilde{G})}_{(\tilde{H},\tilde{h}\tilde{H}')} \circ \mathrm{res}_f = s^{D(G)}_{(f(\tilde{H}),f(\tilde{h})f(\tilde{H})')} \tag{2.7}$$

für $(\tilde{H},\tilde{h}\tilde{H}') \in \mathcal{D}(\tilde{G})/\tilde{G}$ (siehe [Bo01], 2.1). Es seien $H \leq G$, $(U,uU') \in \mathcal{D}(H)$ und $g \in G$. Definiert man $f : {}^gH \to H$ durch $f(ghg^{-1}) := h$ für $h \in H$, so ist $\mathrm{res}_f = c_{g,H}$. Ist $f : H \to G$ die Inklusionsabbildung, so ist $\mathrm{res}_f = \mathrm{res}^G_H$. Gleichung (2.7) impliziert also

$$s^{D({}^gH)}_{({}^gU,{}^gu{}^gU')} \circ c_{g,H} = s^{D(H)}_{(U,uU')} \quad \text{und} \quad s^{D(H)}_{(U,uU')} \circ \ \mathrm{res}^G_H = s^{D(G)}_{(U,uU')}.$$

Es sei $\zeta \in \mathbb{C}$ eine primitive $|G|$-te Einheitswurzel, und es sei $m := |\mathcal{M}(G)/G|$. Man erhält durch

$$s^{D(G)} := \prod_{[H,hH']_G \in \mathcal{D}(G)/G} s^{D(G)}_{(H,hH')} : D(G) \quad \to \quad \mathbb{Z}\,[\zeta]^m$$

einen Ringmonomorphismus (siehe [Bo01], 2.1). Demnach können wir den Ring $D(G)$ mit dessen Bild in $\mathbb{Z}[\zeta]^m$ identifizieren. Unter der *Speziestafel* von $D(G)$ versteht man die $m \times m$-Matrix mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}[\zeta]$, deren Spalten aus den Bildern $s^{D(G)}([H,\lambda]_G)$, $[H,\lambda]_G \in \mathcal{M}(G)/G$, besteht.
Erweitert man $D(G)$ mit dem Koeffizientenring $\mathbb{Q}(\zeta)$, so ist $D_{\mathbb{Q}(\zeta)}(G) \cong \mathbb{Q}(\zeta)^m$, und damit ist $D_{\mathbb{Q}(\zeta)}(G)$ eine halbeinfache $\mathbb{Q}(\zeta)$-Algebra (siehe [De97], Satz 1.7). Setzt man die Spezies $s^{D(G)}_{(U,uU')}$, $(U,uU') \in \mathcal{D}(G)$, linear auf $D_{\mathbb{Q}(\zeta)}(G)$ fort, so sind die primitiven Idempotente von $D_{\mathbb{Q}(\zeta)}(G)$ genau die Elemente $e^{D(G)}_{(H,hH')} \in D_{\mathbb{Q}(\zeta)}(G)$, $(H,hH') \in \mathcal{D}(G)$, mit

$$s^{D(G)}_{(U,uU')}(e^{D(G)}_{(H,hH')}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } [U,uU']_G = [H,hH']_G \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Eine explizite Formel für die primitiven Idempotente von $D_{\mathbb{Q}(\zeta)}(G)$ ist gegeben durch

$$e^{D(G)}_{(H,hH')} = \frac{|H'|}{|N_G(H,hH')||H|} \sum_{\substack{H_0<\ldots<H_n=H \\ H_0\cap hH'\neq\emptyset}} |H_0|(-1)^n \sum_{\varphi\in\hat{H}} \varphi(h^{-1})[H_0,\varphi_{|H_0}]_G$$

(siehe [Bo01], 3.5). Es seien $H_0 < H \leq G$, $h \in H$ mit $H_0 \cap hH' = \emptyset$, $\{\varphi_{|H_0} : \varphi \in \hat{H}\} = \{\varphi_1,...,\varphi_s\}$, $s = (H_0H' : H')$, und $M_i := \{\varphi \in \hat{H} : \varphi_{|H_0} = \varphi_i\}$ für $i = 1,...,s$. Wegen $H_0 \cap hH' = \emptyset$ ist $hH' \notin H_0H'/H'$. Aus Bemerkung 1.1.3 (ii) folgt

$$\sum_{\varphi\in M_i} \varphi(h^{-1}) = 0$$

für alle $i = 1,...,s$. Also ist

$$\sum_{\varphi\in\hat{H}} \varphi(h^{-1})[H_0,\varphi_{|H_0}]_G = \sum_{i=1}^{s}[H_0,\varphi_i]_G \sum_{\varphi\in M_i} \varphi(h^{-1}) = 0.$$

Damit kann die Bedingung $H_0 \cap hH' \neq \emptyset$ in der Formel weggelassen werden. Es seien $\mathcal{V}(G)$ der Untergruppenverband von G und

$$\mu : \mathcal{V}(G) \times \mathcal{V}(G) \to \mathbb{Z}$$

die Möbius-Funktion. Dann gilt für $H \leq G$ die Formel

$$\sum_{H=H_0<\ldots<H_n=G} (-1)^n = \mu(H,G)$$

(siehe [Ha89], Lem. 2.2). Eine alternative Formel für die primitiven Idempotente von $D_{\mathbb{Q}(\zeta)}(G)$ ist nun gegeben durch

$$e_{(H,hH')}^{D(G)} = \frac{|H'|}{|N_G(H,hH')||H|} \sum_{L\leq H} |L|\mu(L,H) \sum_{\varphi\in\hat{H}} \varphi(h^{-1})[L,\varphi_{|L}]_G. \tag{2.8}$$

Im folgenden werden die primitiven Idempotente von $D_{\mathbb{Q}(\zeta)}(G)$ stets mit $e_{(H,hH')}^{D(G)}$, $(H,hH') \in \mathcal{D}(G)$, bezeichnet.

Beispiel 2.2.1 Wir betrachten die symmetrische Gruppe $G := S_3$. Wir setzen $a := (1,2)$ und $b := (1,2,3)$. Dann ist $G = \langle a,b\rangle$, und die Konjugationsklassen der Untergruppen von G werden repräsentiert durch 1, $C_2 := \langle a\rangle$, $C_3 := \langle b\rangle$ und G. Es ist

$$\hat{G} = \{1,\lambda\}, \text{ mit } \lambda(a) = -1,\ \lambda(b) = 1,$$

$$\hat{C}_3 = \{1,\varphi,\eta\} \text{ mit } \varphi(b) = \xi,\ \eta(b) = \xi^2,$$

wobei $\xi \in \mathbb{C}$ eine primitive 3-te Einheitswurzel ist, und

$$\hat{C}_2 = \{1,\psi\} \text{ mit } \psi(a) = -1.$$

Offensichtlich sind die Elemente $[1,1]_G, [C_2,1]_G, [C_2,\psi]_G, [C_3,1]_G, [C_3,\varphi]_G, [G,1]_G, [G,\lambda]_G \in \mathcal{D}(G)/G$ paarweise verschieden. Wegen $a^{-1}ba = b^{-1}$ ist

$${}^a\varphi(b) = \varphi(b^{-1}) = \xi^2 = \eta(b),$$

also ist $[C_3,\varphi]_G = [C_3,\eta]_G$. Damit ist

$$\mathcal{M}(G)/G = \{[1,1]_G, [C_2,1]_G, [C_2,\psi]_G, [C_3,1]_G, [C_3,\varphi]_G, [G,1]_G, [G,\lambda]_G\}$$

eine $\mathbb{Z}$-Basis von $D(G)$. Weiterhin ist

$$\mathcal{D}(G)/G = \{[1,1]_G, [C_2,1]_G, [C_2,a]_G, [C_3,1]_G, [C_3,b]_G, [G,1]_G, [G,aG']_G\}.$$

Tabelle 2.1 zeigt die Speziestafel von $D(G)$. Da die Speziestafel nur Elemente aus $\mathbb{Z}$ beinhaltet, zerfällt der Ring $D(G)$ bereits vollständig bei einer Koeffizientenerweiterung mit $\mathbb{Q}$. Die primitiven Idempotente von $D_{\mathbb{Q}}(G)$ berechnet man nun durch Invertieren der Speziestafel. Man erhält:

$$e_{(G,1G')}^{D(G)} = \frac{1}{2}[G,1]_G + \frac{1}{2}[G,\lambda]_G - \frac{1}{2}[C_3,1]_G - \frac{1}{2}[C_2,1]_G - \frac{1}{2}[C_2,\psi]_G + \frac{1}{2}[1,1]_G,$$

$$e_{(G,aG')}^{D(G)} = \frac{1}{2}[G,1]_G - \frac{1}{2}[G,\lambda]_G - \frac{1}{2}[C_2,1]_G + \frac{1}{2}[C_2,\psi]_G,$$

$$e_{(C_3,1)}^{D(G)} = \frac{1}{6}[C_3,1]_G + \frac{1}{3}[C_3,\varphi]_G - \frac{1}{6}[1,1]_G, \quad e_{(C_3,b)}^{D(G)} = \frac{1}{3}[C_3,1]_G - \frac{1}{3}[C_3,\varphi]_G,$$

$$e_{(C_2,1)}^{D(G)} = \frac{1}{2}[C_2,1]_G + \frac{1}{2}[C_2,\psi]_G - \frac{1}{2}[1,1]_G, \quad e_{(C_2,a)}^{D(G)} = \frac{1}{2}[C_2,1]_G - \frac{1}{2}[C_2,\psi]_G, \quad e_{(1,1)}^{D(G)} = \frac{1}{6}[1,1]_G.$$

	$[1,1]_G$	$[C_2,1]_G$	$[C_2,\psi]_G$	$[C_3,1]_G$	$[C_3,\varphi]_G$	$[G,1]_G$	$[G,\lambda]_G$
$s^{D(G)}_{(1,1)}$	6	3	3	2	2	1	1
$s^{D(G)}_{(C_2,1)}$	0	1	1	0	0	1	1
$s^{D(G)}_{(C_2,a)}$	0	1	-1	0	0	1	-1
$s^{D(G)}_{(C_3,1)}$	0	0	0	2	2	1	1
$s^{D(G)}_{(C_3,b)}$	0	0	0	2	-1	1	1
$s^{D(G)}_{(G,1)}$	0	0	0	0	0	1	1
$s^{D(G)}_{(G,aG')}$	0	0	0	0	0	1	-1

Tabelle 2.1: Die Speziestafel von $D(G)$

Für die Bilder der primitiven Idempotente von $D_{\mathbb{Q}(\zeta)}(G)$ und $D_{\mathbb{Q}(\zeta)}(H)$ für $H \leq G$ unter der Restriktions- und Induktionsabbildung ergeben sich folgende Formeln:

Lemma 2.2.2 *Es seien $H \leq G$ und $h \in H$. Dann gilt:*

(i) $\mathrm{res}^G_H(e^{D(G)}_{(H,hH')}) = \sum_{\substack{[H,uH']_H \in \mathcal{D}(H)/H \\ [H,uH']_G = [H,hH']_G}} e^{D(H)}_{(H,uH')}$

(ii) $\mathrm{ind}^G_H(e^{D(H)}_{(H,hH')}) = (N_G(H,hH') : H) e^{D(G)}_{(H,hH')}$

(iii) $\mathrm{ind}^G_H(\mathrm{res}^G_H(e^{D(G)}_{(H,hH')})) = (N_G(H) : H) e^{D(G)}_{(H,hH')}$

Beweis: (i) Für $(K,kK') \in \mathcal{D}(H)$ ist genau dann

$$s^{D(H)}_{(K,kK')}(\mathrm{res}^G_H(e^{D(G)}_{(H,hH')})) = s^{D(G)}_{(K,kK')}(e^{D(G)}_{(H,hH')}) = 1,$$

wenn (K,kK') und (H,hH') in G konjugiert sind.

(iii) Es sei $[K,\psi]_G \in \mathcal{M}(G)/G$. Dann ist

$$\mathrm{ind}^G_H(\mathrm{res}^G_H([K,\psi]_G)) = \sum_{HgK \in H\backslash G/K} [H \cap {}^gK, {}^g\psi_{|H\cap {}^gK}]_G = [H,1]_G[K,\psi]_G.$$

Also ist

$$\mathrm{ind}^G_H(\mathrm{res}^G_H(e^{D(G)}_{(H,hH')})) = [H,1]_G e^{D(G)}_{(H,hH')} = s^{D(G)}_{(H,hH')}([H,1]_G) e^{D(G)}_{(H,hH')} = \frac{|N_G(H)|}{|H|} e^{D(G)}_{(H,hH')}.$$

(ii) Es seien zunächst $(H,vH') \in \mathcal{D}(G)$ und $g \in N_G(H)$ mit ${}^g(H,vH') = (H,hH')$. Wegen $s^{D(H)}_{(H,hH')} \circ c_{g,H} = s^{D(H)}_{(H,vH')}$ ist

$$c_{g,H}(e^{D(H)}_{(H,vH')}) = e^{D(H)}_{(H,hH')},$$

und wegen $\mathrm{ind}_H^G = c_{g,G} \circ \mathrm{ind}_H^G = \mathrm{ind}_H^G \circ c_{g,H}$ ist

$$\mathrm{ind}_H^G(e_{(H,vH')}^{D(H)}) = \mathrm{ind}_H^G(e_{(H,hH')}^{D(H)}).$$

Also folgt

$$\mathrm{ind}_H^G(\mathrm{res}_H^G(e_{(H,hH')}^{D(G)})) = \mathrm{ind}_H^G(\sum_{\substack{[H,uH']_H \in \mathcal{D}(H)/H \\ [H,uH']_G = [H,hH']_G}} e_{(H,uH')}^{D(H)}) = \frac{|N_G(H)|}{|N_G(H,hH')|}\mathrm{ind}_H^G(e_{(H,hH')}^{D(H)}).$$

Aus (iii) erhält man unmittelbar $\mathrm{ind}_H^G(e_{(H,hH')}^{D(H)}) = (N_G(H,hH') : H)e_{(H,hH')}^{D(G)}$. □

In Analogie zum Burnsidering $B(G)$ einer endlichen Gruppe G können auch beim Ring der monomialen Darstellungen die primitiven Idempotente in Verbindung zu den Konjugationsklassen der perfekten Untergruppen von G gebracht werden.

Satz 2.2.3 *Es sei R ein Integritätsring der Charakteristik 0 mit der Eigenschaft, dass kein $z \in \mathbb{Z}\backslash\{1,-1\}$ in R invertierbar ist. Dann haben $B(G)$ und $D_R(G)$ die gleichen Idempotente. Insbesondere stehen die primitiven Idempotente von $D_R(G)$ in 1-1-Korrespondenz zu den Konjugationsklassen der perfekten Untergruppen von G. Damit ist eine endliche Gruppe G genau dann auflösbar, wenn* 0 *und* 1 *die einzigen Idempotente in $D_R(G)$ sind.*

Beweis: Siehe [Ba04]. □

Es seien $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal in $\mathbb{Z}[\zeta]$, $p := \mathrm{char}(\mathbb{Z}[\zeta]/\mathfrak{p})$ und $R := \mathbb{Z}[\zeta]_\mathfrak{p}$ die Lokalisierung von $\mathbb{Z}[\zeta]$ bei $\mathfrak{p}$. Im folgenden sollen die primitiven Idempotente von $D_R(G)$ angegeben werden. Für $(H,hH'),(U,uU') \in \mathcal{D}(G)$ schreiben wir

$$(H,hH') \equiv_p (U,uU'),$$

falls $s_{(H,hH')}^{D(G)}(x) \equiv s_{(U,uU')}^{D(G)}(x) \pmod{\mathfrak{p}}$ für alle $x \in D(G)$ ist. Dann ist $\equiv_p$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{D}(G)$. Die Äquivalenzklassen von $\mathcal{D}(G)$ bezüglich dieser Relation werden $\mathfrak{p}$-Äquivalenzklassen von $\mathcal{D}(G)$ genannt. Wir setzen

$$\mathcal{D}_p(G) := \{(K,kK') \in \mathcal{D}(G) : |\langle k\rangle| \not\equiv 0 \not\equiv (N_G(K,kK') : K) \pmod{p}\}.$$

Dann gilt:

Satz 2.2.4 *(i) Es ist $(H,hH') \equiv_p (H,h_{p'}H')$ für alle $(H,hH') \in \mathcal{D}(G)$.*

(ii) Es seien $(H,hH') \in \mathcal{D}(G)$ und K/H eine p-Untergruppe von $N_G(H,hH')/H$. Dann ist $(H,hH') \equiv_p (K,hK')$.

(iii) Es seien $(H,hH'),(K,kK') \in \mathcal{D}_p(G)$. Genau dann ist $(H,hH') \equiv_p (K,kK')$, wenn (H,hH') und (K,kK') in G konjugiert sind. □

Beweis: [Fo05], Lem. 1, Lem. 2, Prop. 3.

Es sei $(H,hH') \in \mathcal{D}(G)$. Nach 2.2.4 (i) ist $(H,hH') \equiv_p (H,h_{p'}H')$, und für eine p-Sylowgruppe

H_1/H von $N_G(H,hH')/H$ folgt aus 2.2.4 (ii) $(H,h_{p'}H') \equiv_p (H_1,h_{p'}H_1')$. Für eine p-Sylowgruppe H_2/H_1 von $N_G(H_1,h_{p'}H_1')/H_1$ folgt analog $(H_2,h_{p'}H_2') \equiv_p (H_1,h_{p'}H_1')$. Fährt man auf diese Weise fort, so erhält man $(H_n,h_{p'}H_n') \in \mathcal{D}_p(G)$ für ein $n \in \mathbb{N}$, eine sogenannte *p-Regularisierung* von (H,hH'). Insbesondere ist $(H_n,h_{p'}H_n')$ bis auf Konjugation in G eindeutig bestimmt (siehe [Fo05]). Satz 2.2.4 besagt nun, dass die $\mathfrak{p}$-Äquivalenzklassen von $\mathcal{D}(G)$ durch genau eine Bahn $[H,hH']_G \in \mathcal{D}(G)/G$ mit $(H,hH') \in \mathcal{D}_p(G)$ repräsentiert werden.
Wir bezeichnen mit $O^p(G)$ die kleinste normale Untergruppe von G, so dass $G/O^p(G)$ eine p-Gruppe ist. Die Gruppe G heißt *p-perfekt*, wenn $O^p(G) = G$ ist. Die Gruppe $O^p(G)$ ist stets eine p-perfekte Untergruppe von G. Ferner ist $O^p(G)$ charakteristisch in G. Für eine p-Regularisierung $(H_n,h_{p'}H_n')$ von $(H,hH') \in \mathcal{D}(G)$ folgt $O^p(H_n) = O^p(H) \leq H$. Um die primitiven Idempotente von $D_R(G)$ mit Hilfe der p-perfekten Untergruppen von G beschreiben zu können, werden folgende Lemmata benötigt:

Lemma 2.2.5 *Es seien G eine endliche Gruppe und A eine normale, abelsche Hallgruppe. Dann ist $A = C_A(G) \oplus [A,G]$. Dabei ist $[A,G]$ der Kommutator von A mit G.*

Beweis: [Hu], Kap. III, Satz 13.4. □

Lemma 2.2.6 *Es seien G eine endliche Gruppe und H eine abelsche Hallgruppe von G. Dann ist $H \cap G' \cap Z(G) = 1$.*

Beweis: [Hu], Kap. IV, Satz 2.2. □

Es seien H eine p-perfekte Untergruppe von G und $h \in H$. Wir setzen

$$S^p(H,hH') := \{U \leq G : O^p(U) = H,\ U \leq N_G(H,hH')\}.$$

Für $U \in S^p(H,hH')$ und $u \in U$ ist dann $u_{p'} \in H$, und wegen $p \nmid (H : H')$ ist H/H' eine normale, abelsche Hallgruppe von U/H'. Aus Lemma 2.2.5 folgt

$$H/H' = C_{H/H'}(U/H') \oplus [H/H', U/H'].$$

Mit $u_{p',c}H'$ wird der $C_{H/H'}(U/H')$-Anteil von $u_{p'}H'$ in H/H' bezeichnet.

Satz 2.2.7 *Die primitiven Idempotente von $D_R(G)$ stehen in 1-1-Korrespondenz mit den Elementen der Menge $I := \{[H,hH']_G \in \mathcal{D}(G)/G : H = O^p(H)\}$. Eine explizite Formel ist gegeben durch*

$$e^{D(G),p}_{(H,hH')} = \sum_{\substack{[U,uU']_G \in \mathcal{D}(G)/G \\ U \in S^p(H,hH') \\ u_{p',c}H' = hH'}} e^{D(G)}_{(U,uU')}, \quad [H,hH']_G \in I.$$

Beweis: Nach Satz 1.12 in [De97] stehen die primitiven Idempotente von $D_R(G)$ in 1-1-Korrespondenz mit den $\mathfrak{p}$-Äquivalenzklassen von $\mathcal{D}(G)$. Es soll nun gezeigt werden, dass in jeder $\mathfrak{p}$-Äquivalenzklasse von $\mathcal{D}(G)$ genau eine G-Bahn $[H,hH']_G$ liegt, bei der H eine p-perfekte Untergruppe ist.
Es sei $(U,uU') \in \mathcal{D}(G)$. Wir setzen $H := O^p(U)$, $\bar{H} := H/H'$ und $\bar{U} := U/H'$. Dann ist H p-perfekt, und $\bar{H}$ ist eine normale, abelsche Hallgruppe von $\bar{U}$. Aus Lemma 2.2.5 erhält man

$$\bar{H} = C_{\bar{H}}(\bar{U}) \oplus [\bar{H},\bar{U}],$$

wobei $[\bar{H},\bar{U}]$ der Kommutator von $\bar{H}$ mit $\bar{U}$ ist. Da $(\bar{U}:\bar{H})$ eine p-Potenz ist, ist $u_{p'}H' \in \bar{H}$. Es existiert also ein $hH' \in C_{\bar{H}}(\bar{U})$ und ein $vH' \in [\bar{H},\bar{U}]$ mit $u_{p'}H' = hvH'$. Damit ist auch $u_{p'}U' = hvU' \in U/U'$. Wegen $vH' \in [\bar{H},\bar{U}] \leq \bar{U}' = U'/H'$ ist $v \in U'$. Also ist

$$(U, u_{p'}U') = (U, hU').$$

Nun ist $H \trianglelefteq U$, und wegen $hH' \in C_{\bar{H}}(\bar{U})$ ist $whw^{-1}H' = hH'$ für alle $w \in U$. Also ist $U \leq N_G(H, hH')$. Damit ist U/H eine p-Untergruppe von $N_G(H, hH')/H$, und nach Satz 2.2.4 (i) und (ii) ist

$$(H, hH') \equiv_p (U, hU') = (U, u_{p'}U') \equiv_p (U, uU').$$

Zusammenfassend kann an dieser Stelle gesagt werden, dass für beliebige $(V, vV') \in \mathcal{D}(G)$ stets $(V, vV') \equiv_p (O^p(V), v_{p',c}O^p(V)')$ gilt.
Es seien K eine weitere p-perfekte Untergruppe von G und $k \in K$ mit $(H, hH') \equiv_p (K, kK')$. Wir wollen zeigen, dass $[H, hH']_G = [K, kK']_G$ ist. Wegen $O^p(K) = K$ ist K/K' eine p'-Gruppe. Damit ist $k_p \in K'$, und es folgt $kK' = k_{p'}K'$. Wir können also ohne Einschränkung $k = k_{p'}$ annehmen. Mit der gleichen Begründung nehmen wir $h = h_{p'}$ an. Es seien $(\tilde{H}, h\tilde{H}')$ und $(\tilde{K}, k\tilde{K}')$ jeweilige p-Regularisierungen von (H, hH') und (K, kK'). Dann ist

$$(\tilde{H}, h\tilde{H}') \equiv_p (H, hH') \equiv_p (K, kK') \equiv_p (\tilde{K}, k\tilde{K}'),$$

und aus Satz 2.2.4 (iii) folgt, dass $(\tilde{H}, h\tilde{H}')$ und $(\tilde{K}, k\tilde{K}')$ in G konjugiert sind. Also ist

$$H = O^p(\tilde{H}) =_G O^p(\tilde{K}) = K.$$

Wir nehmen im folgenden $H = K$ an und zeigen, dass hH' und kH' in $N_G(H)$ konjugiert sind. Es sei V/H eine p-Sylowgruppe von $N_G(H, hH')/H$, und es sei $\bar{V} := V/H'$. Nach Lemma 2.2.5 ist $\bar{H} = C_{\bar{H}}(\bar{V}) \oplus [\bar{H}, \bar{V}]$. Offensichtlich ist $[\bar{H}, \bar{V}] \subseteq \bar{V}' \cap \bar{H}$. Ist umgekehrt $x \in \bar{V}' \cap \bar{H}$, so ist $x = cd$ mit $c \in C_{\bar{H}}(\bar{V})$ und $d \in [\bar{H}, \bar{V}]$. Aus Lemma 2.2.6 folgt

$$c = xd^{-1} \in C_{\bar{H}}(\bar{V}) \cap \bar{V}' = Z(\bar{V}) \cap \bar{H} \cap \bar{V}' = 1.$$

Also ist $x \in [\bar{H}, \bar{V}]$, und es folgt

$$\bar{V}' \cap \bar{H} = [\bar{H}, \bar{V}]. \tag{2.9}$$

Es ist $H = O^p(V)$ charakteristisch in V, also ist $H \trianglelefteq N_G(V)$. Da H' charakteristisch in H ist, ist $H' \trianglelefteq N_G(V)$. Nun ist $C_{N_G(V)/H'}(\bar{V}) \trianglelefteq N_G(V)/H'$, und da $\bar{H} \trianglelefteq N_G(V)/H'$ ist, ist

$$C_{\bar{H}}(\bar{V}) = C_{N_G(V)/H'}(\bar{V}) \cap \bar{H} \trianglelefteq N_G(V)/H'. \tag{2.10}$$

Wir zeigen nun, dass (V, hV') bereits eine p-Regularisierung von (H, hH') ist. Es sei dazu $t \in N_G(V, hV') \leq N_G(H)$. Wegen $V \leq N_G(H, hH')$ ist $hH' \in C_{\bar{H}}(\bar{V})$, und wegen $C_{\bar{H}}(\bar{V}) \trianglelefteq N_G(V)/H'$ (Gleichung (2.10)) ist $tht^{-1}H' \in C_{\bar{H}}(\bar{V})$. Also ist auch $h^{-1}tht^{-1}H' \in C_{\bar{H}}(\bar{V})$. Nun ist $h^{-1}tht^{-1} \in V'$, also ist $h^{-1}tht^{-1}H' \in V'/H' = \bar{V}'$. Wegen Gleichung (2.9) ist

$$C_{\bar{H}}(\bar{V}) \cap \bar{V}' = C_{\bar{H}}(\bar{V}) \cap \bar{V}' \cap \bar{H} = C_{\bar{H}}(\bar{V}) \cap [\bar{H}, \bar{V}] = 1,$$

und damit folgt $tht^{-1}H' = hH'$. Also ist $t \in N_G(H, hH')$, und es folgt $N_G(V, hV') \leq N_G(H, hH')$. Damit ist $(N_G(V, hV') : V) = (N_G(V, hV')/H : V/H) \not\equiv 0 \pmod p$. Also ist (V, hV') eine p-Regularisierung von (H, hH'). Wir können daher

$$(\tilde{H}, h\tilde{H}') = (V, hV')$$

annehmen. Insbesondere ist $hH' \in C_{\bar{H}}(\tilde{H}/H')$, und mit der gleichen Begründung folgt $kH' \in C_{\bar{H}}(\tilde{K}/H')$. Wegen $(V, hV') = (\tilde{H}, h\tilde{H}') \equiv_p (\tilde{K}, k\tilde{K}')$ folgt aus Lemma 2.2.4 (iii), dass ein $g \in G$ mit ${}^g(\tilde{K}, k\tilde{K}') = (V, hV')$ existiert. Wegen $O^p(\tilde{K}) = H = O^p(V)$ ist $g \in N_G(H)$. Also ist $gkg^{-1}H' \in C_{\bar{H}}({}^g(\tilde{K}/H')) = C_{\bar{H}}(\bar{V})$. Aus $hH' \in C_{\bar{H}}(\bar{V})$ folgt dann $h^{-1}gkg^{-1}H' \in C_{\bar{H}}(\bar{V})$. Wegen $h^{-1}gkg^{-1} \in V'$ ist $h^{-1}gkg^{-1}H' \in \bar{V}'$, und damit ist

$$h^{-1}gkg^{-1}H' \in C_{\bar{H}}(\bar{V}) \cap \bar{V}' = 1.$$

Also ist $hH' = gkg^{-1}H'$ mit einem $g \in N_G(H)$. Damit wird jede $\mathfrak{p}$-Äquivalenzklasse durch genau eine Bahn $[H, hH']_G$ mit p-perfekter Untergruppe H repräsentiert.
Es sei nun H wieder eine beliebige p-perfekte Untergruppe von G, $h \in H$, und es sei X die $\mathfrak{p}$-Äquivalenzklasse, die von $[H, hH']_G$ repräsentiert wird. Wir setzen

$$T := \{[U, uU']_G : (U, uU') \in X\}$$

und

$$Y := \{[U, uU']_G \in \mathcal{D}(G)/G \ : \ U \in S^p(H, hH'),\ u_{p',c}H' = hH'\}.$$

Es sei $[U, uU']_G \in T$ mit $O^p(U) = H$. Aus den obigen Ausführungen folgt $[H, u_{p',c}H']_G = [H, hH']_G$ und damit die Existenz von $g \in N_G(H)$ mit $g^{-1}hgH' = u_{p',c}H'$. Wegen $U \le N_G(H, u_{p',c}H')$ ist ${}^gU \le N_G(H, hH')$. Weiterhin ist $u_{p'}H' = u_{p',c}vH'$ mit $vH' \in [\bar{H}, U/H']$. Also ist

$$({}^gu)_{p'}H' = {}^g(u_{p'})H' = {}^g(u_{p',c}){}^gvH'$$

mit ${}^g(u_{p',c})H' \in C_{\bar{H}}({}^gU/H')$ und ${}^gvH' \in [\bar{H}, {}^gU/H']$. Nun ist

$$({}^gu)_{p'}H' = ({}^gu)_{p',c}wH'$$

mit $({}^gu)_{p',c} \in C_{\bar{H}}({}^gU/H')$ und $wH' \in [\bar{H}, {}^gU/H']$. Aus der Eindeutigkeit der Zerlegung $\bar{H} = C_{\bar{H}}({}^gU/H') \oplus [\bar{H}, {}^gU, H']$ folgt

$${}^g(u_{p',c})H' = ({}^gu)_{p',c}H'.$$

Also ist $({}^gu)_{p',c}H' = hH'$, und damit ist $[U, uU']_G = [{}^gU, {}^gu{}^gU']_G \in Y$.
Es sei umgekehrt $[U, uU']_G \in Y$. Wir können $O^p(U) = H$ und $u_{p',c}H' = hH'$ annehmen. Nach den vorangegangenen Ausführungen ist $(U, uU') \equiv_p (H, u_{p',c}H') = (H, hH')$. Also ist $[U, uU']_G \in T$, und es folgt $Y = T$.
Nach Satz 1.12 in [De97] ist das primitive Idempotent von $D_R(G)$, das zur Äquivalenzklasse X korrespondiert, von der Form $\sum_{[U,uU']_G \in T} e^{D(G)}_{(U,uU')}$. Wegen $Y = T$ erhält man die obige Idempotentformel. □

Durch dieses Ergebnis wird die erwartete Analogie zu den entsprechenden Idempotentformeln des Burnsideringes aufgezeigt.

Beispiel 2.2.8 Es sei $G = S_3$. Wir benutzen die gleichen Bezeichnungen wie in Beispiel 2.2.1. Es sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in $\mathbb{Z}[\zeta]$ mit $\mathrm{char}(\mathbb{Z}[\zeta]/\mathfrak{p}) = 2$. Da die Speziestafel von $D(G)$ nur Einträge aus $\mathbb{Z}$ enthält, besitzen $D_{\mathbb{Z}[\zeta]_\mathfrak{p}}(G)$ und $D_{\mathbb{Z}_{(2)}}(G)$ die gleichen primitiven Idempotente. Dabei ist $\mathbb{Z}_{(2)}$ der zum Primideal $(2) \subseteq \mathbb{Z}$ lokalisierte Ring. Die Gruppe G besitzt genau 2

Untergruppen U mit $O^2(U) = U$, nämlich die Gruppen 1 und C_3. Nach Satz 2.2.7 sind die primitiven Idempotente von $D_{\mathbb{Z}_{(2)}}(G)$ gegeben durch:

$$e^{D(G),2}_{(C_3,1)} = e^{D(G)}_{(C_3,1)} + e^{D(G)}_{(G,1)} + e^{D(G)}_{(G,aG')} = [G,1]_G - \frac{1}{3}[C_3,1]_G + \frac{1}{3}[C_3,\varphi]_G - [C_2,1]_G + \frac{1}{3}[1,1]_G,$$

$$e^{D(G),2}_{(C_3,b)} = e^{D(G)}_{(C_3,b)}, \quad e^{D(G),2}_{(1,1)} = e^{D(G)}_{(1,1)} + e^{D(G)}_{(C_2,1)} + e^{D(G)}_{(C_2,a)} = [C_2,1]_G - \frac{1}{3}[1,1]_G.$$

2.3 Die Führer der primitiven Idempotente

Es seien G eine endliche Gruppe und $\zeta \in \mathbb{C}$ eine primitive $|G|$-te Einheitswurzel. In diesem Abschnitt soll die zu einem primitiven Idempotent e von $D_{\mathbb{Q}(\zeta)}(G)$ eindeutig bestimmte minimale Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $ne \in D_{\mathbb{Z}[\zeta]}(G)$ berechnet werden. Man nennt eine solche Zahl n den *Führer* von e. Für $H \leq G$ sei $\hat{H} = \{\varphi_{H,1}, ..., \varphi_{H,(H:H')}\}$. Es sei

$$x = (x_H)_{H \leq G} \in \prod_{H \leq G} \mathbb{Z}\hat{H}$$

mit $x_H = z_{H,1}\varphi_{H,1} + ... + z_{H,(H:H')}\varphi_{H,(H:H')}$, $z_{H,1}, ..., z_{H,(H:H')} \in \mathbb{Z}$, für $H \leq G$. Für $H \leq G$ und $i_H \in \{1, ..., (H : H')\}$ definieren wir

$$x(H, \varphi_{H,i_H}) := z_{H,i_H}.$$

Wir betrachten den Teilring von $\prod_{H \leq G} \mathbb{Z}\hat{H}$

$$\hat{D}(G) := (\prod_{H \leq G} \mathbb{Z}\hat{H})^G := \{x \in \prod_{H \leq G} \mathbb{Z}\hat{H} \ : \ x(H,\varphi) = x({}^g(H,\varphi)) \ \forall (H,\varphi) \in \mathcal{M}(G) \ \ \forall g \in G\}.$$

Man nennt $\hat{D}(G)$ den *Ghostring* von $D(G)$ (siehe [Bo04], Bem. 1.6 und Teil C). Unter Berücksichtigung von (2.5) und der Ringisomorphie $R(H/H') \cong \mathbb{Z}\hat{H}$ für $H \leq G$ erhält man einen Ringmonomorphismus

$$\rho := (\pi_H \circ \mathrm{res}^G_H)_{H \leq G} : D(G) \to \hat{D}(G), \tag{2.11}$$

der durch lineare Fortsetzung zu einem Isomorphismus $\rho : \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} D(G) \to \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \hat{D}(G)$ wird (siehe [Bo98], Rem. 8.2 (d)). Unter ρ_H, $H \leq G$, soll stets die Projektion $\pi_H \circ \mathrm{res}^G_H$ verstanden werden. Ferner ist

$$\rho_H([U,\psi]_G) = \sum_{\substack{gU \in G/U \\ H \leq {}^gU}} {}^g\psi_{|H} \in \mathbb{Z}\hat{H}$$

für $H \leq G$ und $[U,\psi]_G \in \mathcal{M}(G)/G$. Die Einbettung des Burnsideringes $B(G)$ in $\hat{D}(G)$ kann folgendermaßen verdeutlicht werden. Für $H \leq G$ sei

$$\omega_H : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\hat{H}$$

die kanonoische Einbettung. Dann gilt mit den Bezeichnungen (2.1) und (2.5)

$$\pi_H \circ \eta_H = \omega_H \circ s^{B(H)}_H$$

für $H \leq G$, was durch Nachrechnen leicht verifiziert werden kann. Unter Berücksichtigung von (1.1) und (2.3) ist die Einbettung dann gegeben durch

$$(\rho_H \circ \eta_G)_{H \leq G} = (\pi_H \circ \eta_H \circ \mathrm{res}^G_H)_{H \leq G} = (\omega_H \circ s^{B(H)}_H \circ \mathrm{res}^G_H)_{H \leq G} = (\omega_H \circ s^{B(G)}_H)_{H \leq G}. \tag{2.12}$$

Das folgende Integralitätskriterium wird für die Führerberechnung nützlich sein.

Satz 2.3.1 *Es sei $x \in \hat{D}(G)$. Genau dann ist $x \in \rho(D(G))$, wenn die Kongruenz*

$$\sum_{(H,\varphi)\leq(I,\psi)\in\mathcal{M}(N_G(H,\varphi))} \mu(H,I)\cdot x(I,\psi) \equiv 0 \pmod{(N_G(H,\varphi):H)}$$

für alle $(H,\varphi)\in\mathcal{M}(G)$ erfüllt ist.

Beweis: [Bo04], Cor. 2.8. □

Lemma 2.3.2 *Es sei H eine Untergruppe von G, und es sei m der quadratfreie Anteil von $(G:G'H)$. Dann ist $(N_G(H):H)$ ein Teiler von $m\mu(H,G)$.*

Beweis: [Ha89], Thm. 4.5. □

Satz 2.3.3 *Es sei $(H,hH')\in\mathcal{D}(G)$. Dann ist $(N_G(H,hH'):H')$ der Führer von $e^{D(G)}_{(H,hH')}$.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass $e^{D(G)}_{(G,gG')}$ für $g\in G$ den Führer $m:=(G:G')$ hat. Für $g\in G$ folgt aus der expliziten Formel der primitiven Idempotente (2.8)

$$e^{D(G)}_{(G,gG')} = \frac{|G'|}{|G|^2}\sum_{L\leq G}|L|\mu(L,G)\sum_{\varphi\in\hat{G}}\varphi(g^{-1})[L,\varphi_{|L}]_G.$$

Der Koeffizient von $[G,1]_G$ in $e^{D(G)}_{(G,gG')}$ ist m^{-1} für alle $g\in G$. Also ist der Führer von $e^{D(G)}_{(G,gG')}$ durch m teilbar.
Wir konstruieren nun Elemente $x_1,x_2,...,x_m\in D_{\mathbb{Q}(\zeta)}(G)$, aus denen wir die Idempotente $e^{D(G)}_{(G,gG')}$, $g\in G$, mittels geeigneter Linearkombinationen zusammensetzen. Mit Hilfe dieser Elemente und der Integralitätsbedingung aus Satz 2.3.1 können dann die gesuchten Führer berechnet werden. Es sei $f:=e^{B(G)}_G$, und es sei $\mathcal{C}(G)$ ein Repräsentantensystem der Konjugationsklassen der Untergruppen von G. Dann ist $f=\sum_{U\in\mathcal{C}(G)}a_U[G/U]$ mit eindeutig bestimmten $a_U\in\mathbb{Q}$. Wir setzen

$$x_1 := \eta_G(f) = \sum_{U\in\mathcal{C}(G)} a_U[U,1]_G,$$

wobei η_G durch (2.1) definiert ist. Es seien $1=\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m$ die linearen Charaktere von G. Für $i=2,...,m$ setzen wir

$$x_i := \sum_{U\in\mathcal{C}(G)} a_U[U,\lambda_{i|U}]_G.$$

Wir zeigen nun, dass $\rho_H(x_i)=0$ ist, falls $H<G$ ist, und $\rho_G(x_i)=\lambda_i$ für alle $i=1,...,m$ ist. Setzt man die Abbildungen in Gleichung (2.12) linear auf $B_{\mathbb{Q}}(G)$ bzw. $D_{\mathbb{Q}}(G)$ fort, so folgt aus Gleichung (2.12) und $s^{B(G)}_H(f)=0$ unmittelbar

$$\rho_H(x_1)=\rho_H(\eta_G(f))=\omega_H(s^{B(G)}_H(f))=0$$

für alle $H<G$. Nun ist ${}^g\lambda_i=\lambda_i$ für alle $g\in G$ und alle $i=1,...,m$. Damit folgt

$$\rho_H([U,\lambda_{i|U}]_G)=\sum_{\substack{gU\in G/U\\ H\leq {}^gU}}{}^g\lambda_{i|H}=\sum_{\substack{gU\in G/U\\ H\leq {}^gU}}\lambda_{i|H}=\lambda_{i|H}\rho_H([U,1]_G)$$

für alle $H, U \leq G$ und $i = 1, ..., m$. Also ist

$$\rho_H(x_i) = \sum_{U \in \mathcal{C}(G)} a_U \rho_H([U, \lambda_{i|U}]_G) = \lambda_{i|H} \sum_{U \in \mathcal{C}(G)} a_U \rho_H([U, 1]_G) = \lambda_{i|H} \rho_H(x_1) = 0$$

für alle $i = 1, ..., m$ und alle $H < G$. Außerdem ist

$$\rho_G(x_i) = \lambda_i \sum_{U \in \mathcal{C}(G)} a_U \rho_G([U, 1]_G) = \lambda_i a_G$$

für alle $i = 1, ..., m$. Aus der expliziten Formel für die primitiven Idempotente von $B_{\mathbb{Q}}(G)$ (1.2) erhält man $a_G = 1$. Also ist $\rho_G(x_i) = \lambda_i$, und damit folgt unter Berücksichtigung von Gleichung (2.6)

$$s_{(H,hH')}^{D(G)}(x_i) = \begin{cases} \lambda_i(h) & \text{falls } H = G \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ferner ist $\rho(x_i) \in \hat{D}(G)$ für alle $i = 1, ..., m$. Aus der 2. Orthogonalitätsrelation folgt für $H \leq G$, $g \in G$ und $h \in H$ unmittelbar

$$s_{(H,hH')}^{D(G)}(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(g^{-1}) x_i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } (H, hH') = (G, gG') \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und damit ist

$$e_{(G,gG')}^{D(G)} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(g^{-1}) x_i$$

für $g \in G$.
Wir zeigen nun, dass der Führer des Idempotents $e_{(G,1G')}^{D(G)}$ gleich m ist. Dazu setzen wir $y_i := \rho(x_i) \in \hat{D}(G)$ für $i = 1, ..., m$. Dann ist

$$y_i(U, \lambda_{j|U}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } (U, \lambda_{j|U}) = (G, \lambda_i) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{2.13}$$

für $U \leq G$ und $i, j \in \{1, ..., m\}$. Nach Satz 2.3.1 ist genau dann $\sum_{i=1}^{m} y_i \in \rho(D(G))$, wenn die Kongruenz

$$\sum_{(H,\varphi) \leq (U,\psi) \in \mathcal{M}(N_G(H,\varphi))} \mu(H, U) \sum_{i=1}^{m} y_i(U, \psi) \equiv 0 \pmod{(N_G(H, \varphi) : H)} \tag{2.14}$$

für alle $(H, \varphi) \in \mathcal{M}(G)$ erfüllt ist. Wegen $\rho_U(x_i) = 0$ für alle $U < G$ und alle $i = 1, ..., m$ ist dann $\sum_{i=1}^{m} y_i(U, \psi) = 0$ für alle $U < G$. Ist $(H, \varphi) \in \mathcal{M}(G)$, so dass $(H, \varphi) \not\leq (G, \lambda_i)$ für alle $i = 1, ..., m$ oder $H \ntrianglelefteq G$ ist, so ist Kongruenz (2.14) erfüllt. Es sei also $(H, \varphi) \in \mathcal{M}(G)$, so dass H normal in G ist und ein $\lambda \in \hat{G}$ mit $(H, \varphi) \leq (G, \lambda)$ existiert. In diesem Fall gibt es insgesamt genau

$$k := (G : HG')$$

Fortsetzungen von φ auf G (siehe Bem. 1.1.3). Bezeichnet man diese mit $\lambda_{i_1}, ..., \lambda_{i_k}$ $(i_1, ..., i_k \in \{1, ..., m\})$, so folgt aus (2.13)

$$\sum_{(H,\varphi) \leq (U,\psi) \in \mathcal{M}(N_G(H,\varphi))} \mu(H, U) \sum_{i=1}^{m} y_i(U, \psi) = \mu(H, G) \sum_{j=1}^{k} y_{i_j}(G, \lambda_{i_j}) = \mu(H, G)(G : HG').$$

Nach Lemma 2.3.2 ist $(N_G(H,\varphi):H)$ stets ein Teiler von $(G:HG')\mu(H,G)$, also ist Kongruenz (2.14) für alle $(H,\varphi)\in\mathcal{M}(G)$ erfüllt. Es folgt

$$\rho((G:G')e^{D(G)}_{(G,1G')}) = \rho(\sum_{i=1}^m x_i) = \sum_{i=1}^m y_i \in \rho(D(G)),$$

und wegen der Injektivität von ρ folgt $(G:G')e^{D(G)}_{(G,1G')}\in D(G)$. Also ist $(G:G')$ der Führer von $e^{D(G)}_{(G,1G')}$.

Für $U\leq G$ seien $\tau_{U,1},...,\tau_{U,s_U}$, $s_U=(UG':G')$, die paarweise verschiedenen Einschränkungen $\lambda_{1|U},...,\lambda_{m|U}$. Für $j=1,...,s_U$ setzen wir $M_{\tau_{U,j}}:=\{\varphi\in\hat{G}:\varphi_{|U}=\tau_{U,j}\}$. Nach Bemerkung 1.1.3 ist

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m \lambda_i(g^{-1})[U,\lambda_{i|U}]_G &= \sum_{j=1}^{s_U}[U,\tau_{U,j}]_G \sum_{\varphi\in M_{\tau_{U,j}}}\varphi(g^{-1})\\ &= \begin{cases}(G:UG')\sum_{j=1}^{s_U}\tau_{U,j}(g^{-1})\,[U,\tau_{U,j}]_G & \text{falls } gG'\in UG'/G'\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}\end{aligned}$$

für alle $U\leq G$ und alle $g\in G$. Also ist

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m \lambda_i(g^{-1})x_i &= \sum_{U\in\mathcal{C}(G)} a_U\sum_{i=1}^m\lambda_i(g^{-1})[U,\lambda_{i|U}]_G\\ &= \sum_{\substack{U\in\mathcal{C}(G)\\ gG'\in UG'/G'}} a_U(G:UG')\sum_{j=1}^{s_U}\tau_{U,j}(g^{-1})[U,\tau_{U,j}]_G\end{aligned}$$

für $g\in G$. Für $U\leq G$ und $r,t\in\{1,...,s_U\}$ mit $r\neq t$ ist $[U,\tau_{U,r}]_G\neq[U,\tau_{U,t}]_G$. Wegen

$$me^{D(G)}_{(G,1G')} = \sum_{i=1}^m x_i = \sum_{U\in\mathcal{C}(G)} a_U(G:UG')\sum_{j=1}^{s_U}[U,\tau_{U,j}]_G\in D(G)$$

ist dann $a_U(G:UG')\in\mathbb{Z}$ für alle $U\in\mathcal{C}(G)$. Damit ist

$$me^{D(G)}_{(G,gG')} = \sum_{i=1}^m\lambda_i(g^{-1})x_i\in D_{\mathbb{Z}[\zeta]}(G).$$

Also ist $m=(G:G')$ der Führer der Idempotente $e^{D(G)}_{(G,gG')}$, $g\in G$. Es sei $(H,hH')\in\mathcal{D}(G)$. Nach Lemma 2.2.2 (ii) ist

$$(N_G(H,hH'):H')e^{D(G)}_{(H,hH')} = \mathrm{ind}_H^G((H:H')e^{D(H)}_{(H,hH')})\in D_{\mathbb{Z}[\zeta]}(G).$$

Andererseits ist der Koeffizient von $[H,1]_G$ in $e^{D(G)}_{(H,hH')}$ gleich $|H'|/|N_G(H,hH')|$, also ist $(N_G(H,hH'):H')$ der Führer von $e^{D(G)}_{(H,hH')}$. □

Als erste Anwendungen von Satz 2.3.3 können folgende Ergebnisse formuliert werden:

Satz 2.3.4 *Die Gruppenordnung $|G|$ ist durch $D(G)$ eindeutig bestimmt.*

Beweis: Es sei $W \subseteq \mathbb{C}$ die Menge aller Einheitswurzeln, und es sei $\mathcal{O}$ der Ring der algebraisch ganzen Zahlen von $\mathbb{Q}(W)$. Für alle $(H, hH') \in \mathcal{D}(G)$ ist $e^{D(G)}_{(H,hH')} \in D_{\mathbb{Q}(W)}(G)$ ein primitives Idempotent, und es ist $(N_G(H, hH') : H')$ die kleinste Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $ne^{D(G)}_{(H,hH')} \in D_{\mathcal{O}}(G)$. Insbesondere ist $|G|$ der Führer des primitiven Idempotentes $e^{D(G)}_{(1,1)}$. Also ist

$$|G| = \min\{n \in \mathbb{N} : ne^{D(G)}_{(H,hH')} \in D_{\mathcal{O}}(G) \text{ für alle } (H, hH') \in \mathcal{D}(G)\}.$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Der obige Satz besagt also, dass die Isomorphie $D(G) \cong D(\tilde{G})$ für endliche Gruppen G und $\tilde{G}$ stets $|G| = |\tilde{G}|$ impliziert. Die folgenden Sätze sind unmittelbare Konsequenzen aus Satz 2.3.3.

Satz 2.3.5 *Genau dann ist G abelsch, wenn die Führer aller primitiven Idempotente von $D_{\mathbb{Q}(\zeta)}(G)$ gleich sind. Gegebenenfalls ist $|G|$ der Führer aller primitiven Idempotente von $D_{\mathbb{Q}(\zeta)}(G)$.* □

Damit kann in $D(G)$ erkannt werden, ob eine Gruppe G abelsch ist.

Satz 2.3.6 *Ist $e^{D(G)}_{(H,hH')} \in D_{\mathbb{Q}(\zeta)}(G)$ ein primitives Idempotent mit Führer $|G|$, so ist H ein abelscher Normalteiler von G und $h \in Z(G)$. Insbesondere besitzt G genau dann einen abelschen Normalteiler $1 \neq N \trianglelefteq G$, wenn es mehr als ein primitives Idempotent in $D_{\mathbb{Q}(\zeta)}(G)$ gibt, das den Führer $|G|$ hat.* □

Satz 2.3.7 *Genau dann besitzt G eine perfekte, selbstnormalisierende Untergruppe, wenn $D_{\mathbb{Q}(\zeta)}(G)$ ein primitives Idempotent mit Führer 1 besitzt.*

Beweis: Ist $U \leq G$ perfekt und selbstnormalisierend, so ist $(N_G(U, 1U') : U') = (U : U') = 1$ der Führer von $e^{D(G)}_{(U,1U')}$.
Es sei umgekehrt $(U, uU') \in \mathcal{D}(G)$, so dass $e^{D(G)}_{(U,uU')}$ den Führer 1 hat. Dann ist $(U : U') = 1$, also ist U perfekt. Weiterhin ist $1 = (N_G(U, uU') : U') = (N_G(U, 1U) : U) = (N_G(U) : U)$. Also ist U selbstnormalisierend. □

Satz 2.3.8 *Es seien G und $\tilde{G}$ endliche Gruppen und $\alpha : D(G) \to D(\tilde{G})$ ein Isomorphismus. Es seien $h \in Z(G)$, $H := \langle h \rangle$ und $n := |H|$. Ist $\alpha(e^{D(G)}_{(H,h)}) = e^{D(\tilde{G})}_{(\tilde{H},\tilde{h}\tilde{H}')}$ mit $(\tilde{H}, \tilde{h}\tilde{H}') \in \mathcal{D}(\tilde{G})$, so ist $\tilde{H}$ ein abelscher Normalteiler in $\tilde{G}$, $\tilde{h} \in Z(\tilde{G})$, und es ist $|\langle \tilde{h} \rangle| \in \{n, 2n, \frac{1}{2}n\}$.*

Beweis: Wegen $h \in Z(G)$ ist H ein abelscher Normalteiler von G. Ferner hat $e^{D(G)}_{(H,h)}$ den Führer $|G|$. Wir setzen

$$M := \{x \in D_{\mathbb{Q}}(G) : s^{D(G)}_{(H,h)}(x) \in \mathbb{C} \text{ ist eine Einheitswurzel}\}.$$

Es ist $s^{D(G)}_{(H,h)}(x) \in \mathbb{Q}(\zeta)$ für alle $x \in M$, und da $\pm\zeta^i$, $i \in \mathbb{N}$, die einzigen Einheitswurzeln in $\mathbb{Q}(\zeta)$ sind, ist die Menge $\{\mathrm{ord}(\xi) : s^{D(G)}_{(H,h)}(x) = \xi,\ x \in M\}$ beschränkt. Wir setzen

$$m := \max\{\mathrm{ord}(\xi) : s^{D(G)}_{(H,h)}(x) = \xi,\ x \in M\}.$$

Es sei $\lambda \in \hat{H}$ mit $\lambda(h) = \omega$, wobei $\omega \in \mathbb{C}$ eine primitive n-te Einheitswurzel ist. Dann ist

$$s_{(H,h)}^{D(G)}([H,\lambda]_G) = \sum_{gH \in G/H} {}^g\lambda(h) = (G:H)\omega,$$

also ist $y := (-1)^n (G:H)^{-1}[H,\lambda]_G \in M$. Es folgt

$$\operatorname{ord}(s_{(H,h)}^{D(G)}(y)) = \begin{cases} 2n & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ n & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases} \tag{2.15}$$

Wir zeigen, dass $m = \operatorname{ord}(s_{(H,h)}^{D(G)}(y))$ ist. Es sei

$$x := \sum_{[U,\psi]_G \in \mathcal{M}(G)/G} a_{[U,\psi]}[U,\psi]_G \in M$$

mit $a_{[U,\psi]} \in \mathbb{Q}$ für alle $[U,\psi]_G \in \mathcal{M}(G)/G$. Im Fall $U \leq G$ mit $H \not\leq_G U$ ist $s_{(H,h)}^{D(G)}([U,\psi]_G) = 0$. Ist $[U,\psi]_G \in \mathcal{M}(G)/G$ mit $H \leq_G U$, so ist $H \leq U$, und es ist $\psi(h) \in \mathbb{Q}(\omega)$. Es folgt

$$s_{(H,h)}^{D(G)}(x) = \sum_{[U,\psi]_G \in \mathcal{M}(G)/G} a_{[U,\psi]} s_{(H,h)}^{D(G)}([U,\psi]_G) = \sum_{\substack{[U,\psi]_G \in \mathcal{M}(G)/G \\ H \leq U}} a_{[U,\psi]} \sum_{gU \in G/U} \psi(h) \in \mathbb{Q}(\omega).$$

Da $\pm\omega^i$, $i \in \mathbb{N}$, die einzigen Einheitswurzeln in $\mathbb{Q}(\omega)$ sind, ist $m \leq 2n$, falls n ungerade ist, und $m \leq n$, falls n gerade ist. Zusammen mit (2.15) erhalten wir

$$m = \begin{cases} 2n & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ n & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Nun hat $e_{(\tilde{H},\tilde{h}\tilde{H}')}^{D(\tilde{G})}$ ebenfalls den Führer $|G| = |\tilde{G}|$. Nach Satz 2.3.6 ist $\tilde{H}$ ein abelscher Normalteiler in $\tilde{G}$ und $\tilde{h} \in Z(\tilde{G})$. Wir setzen

$$\tilde{M} := \{\tilde{x} \in D_{\mathbb{Q}}(\tilde{G}) : s_{(\tilde{H},\tilde{h})}^{D(\tilde{G})}(\tilde{x}) \in \mathbb{C} \text{ ist eine Einheitswurzel}\}$$

und

$$\tilde{m} := \max\{\operatorname{ord}(\xi) : s_{(\tilde{H},\tilde{h})}^{D(\tilde{G})}(\tilde{x}) = \xi,\ \tilde{x} \in \tilde{M}\}.$$

Es sei $\tilde{n} := |\langle\tilde{h}\rangle|$ und $\tilde{\omega} \in \mathbb{C}$ eine primitive $|\tilde{n}|$-te Einheitswurzel. Da $\tilde{H}$ abelsch ist, existiert ein linearer Charakter $\tilde{\lambda}$ von $\tilde{H}$ mit $\tilde{\lambda}(\tilde{h}) = \tilde{\omega}$. Analog den obigen Ausführungen ist $\tilde{y} := (-1)^{\tilde{n}}(\tilde{G}:\tilde{H})^{-1}[\tilde{H},\tilde{\lambda}]_{\tilde{G}} \in \tilde{M}$ und

$$\operatorname{ord}(s_{(\tilde{H},\tilde{h})}^{D(\tilde{G})}(\tilde{y})) = \begin{cases} 2\tilde{n} & \text{falls } \tilde{n} \text{ ungerade} \\ \tilde{n} & \text{falls } \tilde{n} \text{ gerade.} \end{cases}$$

Mit der gleichen Begründung wie oben folgt

$$\tilde{m} = \begin{cases} 2\tilde{n} & \text{falls } \tilde{n} \text{ ungerade} \\ \tilde{n} & \text{falls } \tilde{n} \text{ gerade.} \end{cases}$$

Wegen $s_{(\tilde{H},\tilde{h})}^{D(\tilde{G})} \circ \alpha = s_{(H,h)}^{D(G)}$ ist $\alpha(M) = \tilde{M}$, und es folgt $m = \tilde{m}$. Es können also die Fälle $n = \tilde{n}$, $n = 2\tilde{n}$ und $2n = \tilde{n}$ auftreten. Also ist $\tilde{n} \in \{n, 2n, \frac{1}{2}n\}$. □

Als unmittelbare Konsequenz erhält man die folgenden Korollare.

Korollar 2.3.9 *Es seien G und $\tilde{G}$ endliche Gruppen mit $D(G) \cong D(\tilde{G})$. Ist $2 \neq p$ eine Primzahl mit $p \mid |Z(G)|$, so ist $p \mid |Z(\tilde{G})|$. Existiert in $Z(G)$ ein Element der Ordnung 4, so ist 2 ein Teiler von $|Z(\tilde{G})|$.* □

Korollar 2.3.10 *Es seien G und $\tilde{G}$ endliche Gruppen mit ungerader Ordnung und $D(G) \cong D(\tilde{G})$. Sind $Z(G)$ und $Z(\tilde{G})$ zyklisch, so ist $|Z(G)| = |Z(\tilde{G})|$.* □

In der Beweisführung von Satz 2.3.8 wird die Tatsache benutzt, dass ein Element $h \in Z(G)$ in der Speziestafel von $D(G)$ an einer Stelle eine Einheitswurzel der Ordnung $|\langle h \rangle|$ oder $2|\langle h \rangle|$ erzeugt. Im allgemeinen ist nicht zu erwarten, dass zu einem gegebenen Element $g \in G$ eine $|\langle g \rangle|$-te Einheitswurzel in der Speziestafel von $D(G)$ zu finden ist, wie Tabelle 2.1 im Fall $g = b$ zeigt.

Im folgenden Satz soll ein weiteres Integralitätskriterium für Elemente des Ghostringes angegeben werden. Wir benötigen zunächst das folgende Lemma.

Lemma 2.3.11 *Es sei G eine endliche Gruppe mit $G' < G$, und es sei p eine Primteiler von $(G : G')$. Es seien $N_p := \{H \trianglelefteq G \ : \ (G : H) = p\}$ und $U_p := \{H \leq G \ : \ (G : H) = p\}$. Dann ist $|N_p| \equiv |U_p| \equiv 1 \pmod{p}$.*

Beweis: Die Normalteiler in G mit Index p korrespondieren genau zu den Untergruppen von $G/O^p(G)$ mit Index p. Nun ist die Anzahl der Untergruppen einer p-Gruppe mit einer bestimmten Ordnung stets kongruent 1 modulo p (siehe [Hu], Kapitel III, Satz 8.8). Also ist $|N_p| \equiv 1 \pmod{p}$. Es seien $\mathcal{H}_1, ..., \mathcal{H}_r$, $r \in \mathbb{N}$, die verschiedenen G-Konjugationsklassen von nicht-normalen Untergruppen H von G mit $(G : H) = p$. Für $i \in \{1, ..., r\}$ und $H \in \mathcal{H}_i$ ist $(G : N_G(H)) = p$. Also ist $|\mathcal{H}_i| = p$, und damit ist

$$|U_p| = |N_p| + |\mathcal{H}_1| + ... + |\mathcal{H}_r| \equiv 1 \pmod{p}.$$

□

Für eine Untergruppe $U \leq G$ bezeichnen wir wieder mit $(G : U)_0$ den quadratfreien Anteil von $(G : U)$.

Satz 2.3.12 *Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $(U, \lambda) \in \mathcal{M}(G)$. Es sei $x = x_{n,(U,\lambda)} \in \hat{D}(G)$ definiert durch*

$$x(K, \psi) = \begin{cases} n & \text{falls } (K, \psi) =_G (U, \lambda) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Genau dann ist $x \in \rho(D(G))$, wenn $(N_G(U, \lambda) : U)(U : U')_0$ ein Teiler von n ist.

Beweis: Nach Satz 2.3.1 ist genau dann $x \in \rho(D(G))$, wenn die Kongruenz

$$\sum_{(H,\varphi) \leq (I,\psi) \in \mathcal{M}(N_G(H,\varphi))} \mu(H, I) x(I, \psi) \equiv 0 \pmod{(N_G(H, \varphi) : H)} \tag{2.16}$$

für alle $(H, \varphi) \in \mathcal{M}(G)$ erfüllt ist. Es sei also $(H, \varphi) \in \mathcal{M}(G)$ mit ${}^g(U, \lambda) \in \mathcal{M}(N_G(H, \varphi))$ für ein $g \in G$, und es sei

$$\{\mu(H, I) : (H, \varphi) \leq (I, \psi) \in \mathcal{M}(N_G(H, \varphi)), (I, \psi) =_G (U, \lambda)\} = \{\mu_1, ..., \mu_s\}$$

mit $s \in \mathbb{N}$. Wir setzen

$$\mathfrak{A}_i := \{(I,\psi) : (H,\varphi) \le (I,\psi) \in \mathcal{M}(N_G(H,\varphi)), (I,\psi) =_G (U,\lambda), \mu(H,I) = \mu_i\}$$

und wählen Repräsentanten $(U_i,\lambda_i) \in \mathfrak{A}_i$ für $i = 1,...,s$. Dann ist

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{A}_i| =& |\{{}^g(U,\lambda) \ : \ g \in G, \ H \trianglelefteq {}^gU, \ (H,\varphi) \le {}^g(U,\lambda), \ \mu(H,{}^gU) = \mu_i\}| \\
=& \frac{1}{|N_G(U_i,\lambda_i)|}|\{g \in G \ : \ H \trianglelefteq {}^gU, \ (H,\varphi) \le {}^g(U,\lambda), \ \mu(H,{}^gU) = \mu_i\}| \\
=& \frac{1}{|N_G(U_i,\lambda_i)|}|\{g^{-1} \in G \ : \ {}^gH \trianglelefteq U, \ {}^g(H,\varphi) \le (U,\lambda), \ \mu({}^gH,U) = \mu_i\}| \\
=& \frac{|N_G(H,\varphi)|}{|N_G(U_i,\lambda_i)|}|\mathfrak{B}_i|
\end{aligned}$$

mit

$$\mathfrak{B}_i = \{{}^g(H,\varphi) \ : \ g \in G, \ {}^gH \trianglelefteq U, \ {}^g(H,\varphi) \le (U,\lambda), \ \mu({}^gH,U) = \mu_i\}$$

für $i = 1,...,s$. Damit ist

$$\sum_{(H,\varphi)\le(I,\psi)\in\mathcal{M}(N_G(H,\varphi))} \mu(H,I)x(I,\psi) = n\sum_{i=1}^{s}\mu_i|\mathfrak{A}_i| = n\sum_{i=1}^{s}\frac{|N_G(H,\varphi)|}{|N_G(U_i,\lambda_i)|}\mu_i|\mathfrak{B}_i|. \tag{2.17}$$

Aus Lemma 2.3.2 folgt

$$(U_i : U_i'H)_0\mu_i = (N_{U_i}(H) : H)r_i = (U_i : H)r_i,$$

wobei $r_i \in \mathbb{Z}$ für $i = 1,...,s$ ist. Also existiert $k_i \in \mathbb{Z}$ mit

$$(U_i : H)k_i = (U_i : U_i')_0\mu_i = (U : U')_0\mu_i \tag{2.18}$$

für $i = 1,...,s$. Wegen $(N_G(U_i,\lambda_i) : U_i) = (N_G(U,\lambda) : U)$ für alle $i = 1,...,s$ erhält man aus den Gleichungen (2.17) und (2.18)

$$\sum_{(H,\varphi)\le(I,\psi)\in\mathcal{M}(N_G(H,\varphi))} \mu(H,I)x(I,\psi) = n\frac{(N_G(H,\varphi) : H)}{(N_G(U,\lambda) : U)(U : U')_0}\sum_{i=1}^{s}k_i|\mathfrak{B}_i|. \tag{2.19}$$

Ist nun $(N_G(U,\lambda) : U)(U : U')_0$ ein Teiler von n, so folgt aus Gleichung (2.19) und Kongruenz (2.16) unmittelbar, dass $x \in \rho(D(G))$ ist.
Es sei umgekehrt $x \in \rho(D(G))$. Dann ist Kongruenz (2.16) für alle $(H,\varphi) \in \mathcal{M}(G)$ erfüllt. Für $(H,\varphi) = (U,\lambda)$ folgt aus Kongruenz (2.16), dass $n = (N_G(U,\lambda) : U)n'$ mit einem $n' \in \mathbb{Z}$ ist. Im Fall $U = U'$ ist die Behauptung dann klar. Es sei also $U' < U$, und es sei p ein Primteiler von $(U : U')$. Es sei $U' \le H \le U$ mit $(U : H) = p$, und es sei $\varphi := \lambda_{|H} \in \hat{H}$. Dann ist $(U,\lambda) \in \mathcal{M}(N_G(H,\varphi))$ und $\mu(H,{}^gU) = -1$ für alle $g \in G$ mit $(H,\varphi) \le ({}^gU,{}^g\lambda) \in \mathcal{M}(N_G(H,\varphi))$. Also ist $s = 1$, und mit $(U_1,\lambda_1) := (U,\lambda)$ und $p\mu_1 = -(U : H)$ folgt aus (2.17)

$$\sum_{(H,\varphi)\le(I,\psi)\in\mathcal{M}(N_G(H,\varphi))} \mu(H,I)x(I,\psi) = -n\frac{(N_G(H,\varphi) : H)}{(N_G(U,\lambda) : U)p}|\mathfrak{B}|$$

mit $\mathfrak{B} = \{^g(H, \lambda_{|H}) : g \in G, {}^gH \trianglelefteq U, {}^g(H, \lambda_{|H}) \leq (U, \lambda)\}$.
Es seien nun $H_1, ..., H_t \trianglelefteq U$ mit $(U : H_i) = p$ $(i = 1, ..., t)$, $t \in \mathbb{N}$, so gewählt, dass für alle $K \trianglelefteq U$ mit $(U : K) = p$ genau ein $j \in \{1, ..., t\}$ existiert mit

$$(K, \lambda_{|K}) \in \{^g(H_j, \lambda_{|H_j}) \ : \ g \in G, \ {}^gH_j \trianglelefteq U, \ {}^g(H_j, \lambda_{|H_j}) \leq (U, \lambda)\} =: \mathfrak{H}_j.$$

Nach den obigen Ausführungen ist

$$\sum_{(H_j,\lambda_{|H_j}) \leq (I,\psi) \in \mathcal{M}(N_G(H_j,\lambda_{|H_j}))} \mu(H_j, I) x(I, \psi) = -n|\mathfrak{H}_j| \frac{(N_G(H_j, \lambda_{|H_j}) : H_j)}{(N_G(U, \lambda) : U)p}$$

für alle $j = 1, ..., t$. Also ist

$$(N_G(U, \lambda) : U)p \mid n|\mathfrak{H}_j|$$

für alle $j = 1, ..., t$. Ist $N_p := \{K \trianglelefteq U : (U : K) = p\}$, so folgt $|N_p| = \sum_{j=1}^t |\mathfrak{H}_j|$. Damit ist

$$(N_G(U, \lambda) : U)p \mid n \sum_{j=1}^{t} |\mathfrak{H}_j| = n|N_p| = (N_G(U, \lambda) : U)n'|N_p|.$$

Aus Lemma 2.3.11 folgt, dass p kein Teiler von $|N_p|$ ist. Also ist p ein Teiler von n'. Da p beliebig gewählt war, ist $(U : U')_0$ ein Teiler von n', also folgt die Behauptung. □

2.4 Sylowgruppen

Im diesem Abschnitt sollen einige Ergebnisse vorgestellt werden, die die Sylowgruppen von gegebenen Gruppen G und $\tilde{G}$ mit $D(G) \cong D(\tilde{G})$ betreffen. Dazu werden wir hauptsächlich die Ergebnisse aus dem vorigen Kapitel, sowie Satz 2.2.7 über die primitiven Idempotente bei Lokalisierungen verwenden.

Satz 2.4.1 *Es seien G und $\tilde{G}$ endliche Gruppen, $\alpha : D(\tilde{G}) \to D(G)$ ein Isomorphismus, p ein Primteiler von $|G|$ und P eine p-Sylowgruppe von G. Es sei $\alpha(e^{D(\tilde{G})}_{(1,1)}) = e^{D(G)}_{(U,uU')}$. Es ist $H := O^p(U)$ ein abelscher p'-Normalteiler von G und $h := u_{p'} \in Z(G)$. Wir setzen*

$$I := \{[K, kK']_G \in \mathcal{D}(G)/G : K = HV, \ V \leq P, \ k = hv, \ v \in V\}.$$

Dann ist

$$\alpha(e^{D(\tilde{G}),p}_{(1,1)}) = \sum_{[K,kK']_G \in I} e^{D(G)}_{(K,kK')}.$$

Beweis: Nach Satz 2.3.4 und Satz 2.3.8 ist $|G| = |\tilde{G}|$, U ist ein abelscher Normalteiler von G und $u \in Z(G)$ mit $|\langle u \rangle| \in \{1, 2\}$. Also ist H ein abelscher p'-Normalteiler von G und $h \in \{1, u\} \subseteq Z(G)$. Mit den Bezeichnungen aus Satz 2.2.7 ist

$$U \in S^p(H, h) := \{K \leq G : O^p(K) = H, \ K \leq N_G(H, h)\} = \{K \leq G : O^p(K) = H\},$$

und wegen $u_{p'} \in Z(G)$ ist $u_{p',c} = u_{p'}$. Also ist $e^{D(G)}_{(U,u)}$ in der Summe

$$e^{D(G),p}_{(H,h)} = \sum_{\substack{[K,kK']_G \in \mathcal{D}(G)/G \\ K \in S^p(H,h) \\ k_{p',c}=h}} e^{D(G)}_{(K,kK')}$$

enthalten. Damit ist $\alpha(e^{D(\tilde{G}),p}_{(1,1)}) = e^{D(G),p}_{(H,h)}$. Es sei

$$J := \{[K,kK']_G \in \mathcal{D}(G)/G : O^p(K) = H,\ k_{p',c} = h\}.$$

Wir zeigen $I = J$. Es sei zunächst $[K,kK']_G \in I$. Dann ist $O^p(K) = H$. Ferner können wir $k = hv$ mit $v \in V$ und $V \leq P$ annehmen. Wegen $h \in Z(G)$ ist dann $h = k_{p'} = k_{p',c}$. Also ist $[K,kK']_G \in J$.
Es sei umgekehrt $[K,kK']_G \in J$. Wir können $k_{p',c} = h$ annehmen. Es ist $H = O^p(K)$, und nach Lemma 2.2.5 ist $H = C_H(K) \oplus [H,K]$. Wegen $k_{p'} \in H$ ist $k_{p'} = k_{p',c}y = hy$ mit $y \in [H,K] \leq K'$. Also ist

$$[K,kK']_G = [K,k_pk_{p'}K']_G = [K,k_phyK']_G = [K,hk_pK']_G.$$

Nach dem Satz von Schur-Zassenhaus existiert eine p-Untergruppe $V \leq G$ mit $K = HV$. Ferner existiert $g \in G$ mit ${}^gV \leq P$. Dann ist ${}^gK = H({}^gV)$. Da ${}^gV$ eine p-Sylowgruppe von ${}^gK$ ist, existiert $w \in {}^gK$ mit ${}^{wg}k_p \in {}^gV$. Also ist

$$[K,kK']_G = [{}^gK, h({}^gk_p){}^gK']_G = [{}^gK, h({}^{wg}k_p){}^gK']_G \in I.$$

Damit ist alles gezeigt. □

Es können nun die folgenden Ergebnisse formuliert werden.

Satz 2.4.2 *Es seien G und $\tilde{G}$ endliche Gruppen mit $D(G) \cong D(\tilde{G})$, und es sei p ein Primteiler von $|G|$. Besitzt $\tilde{G}$ eine nicht-triviale, normale p-Untergruppe, so besitzt auch G eine nicht-triviale, normale p-Untergruppe.*

Beweis: Es sei $\tilde{P}$ eine p-Sylowgruppe von $\tilde{G}$. Nach Satz 2.2.7 ist

$$e^{D(\tilde{G}),p}_{(1,1)} = \sum_{\substack{[\tilde{K},\tilde{k}\tilde{K}']_{\tilde{G}} \in \mathcal{M}(\tilde{G})/\tilde{G} \\ \tilde{K} \leq \tilde{P}}} e^{D(\tilde{G})}_{(\tilde{K},\tilde{k}\tilde{K}')}. \tag{2.20}$$

Nach Voraussetzung existiert eine p-Untergruppe $1 \neq \tilde{U} \leq \tilde{P}$ mit $\tilde{U} \trianglelefteq \tilde{G}$. Dann ist $\tilde{K} := Z(\tilde{U}) \neq 1$ eine abelsche p-Untergruppe von $\tilde{G}$, die charakteristisch in $\tilde{U}$ ist. Also ist $\tilde{K}$ normal in $\tilde{G}$, und damit hat $e^{D(\tilde{G})}_{(\tilde{K},1)}$ den Führer $|\tilde{G}|$. In der Summe in Gleichung (2.20) stehen also mindestens zwei primitive Idempotente, deren Führer gleich $|\tilde{G}|$ ist (nämlich $e^{D(\tilde{G})}_{(1,1)}$ und $e^{D(\tilde{G})}_{(\tilde{K},1)}$).
Es sei $\alpha : D(\tilde{G}) \to D(G)$ ein Isomorphismus, P eine p-Sylowgruppe von G, und es sei $\alpha(e^{D(\tilde{G})}_{(1,1)}) = e^{D(G)}_{(U,uU')}$ mit einem abelschen Normalteiler $U \trianglelefteq G$ und $u \in Z(G)$. Nach Satz 2.4.1 ist

$$\alpha(e^{D(\tilde{G}),p}_{(1,1)}) = \sum_{[K,kK']_G \in I} e^{D(G)}_{(K,kK')}$$

mit $I = \{[K, kK']_G \in \mathcal{D}(G)/G : K = O^p(U)V,\ k = u_{p'}v,\ v \in V,\ V \leq P\}$. Es existiert also mindestens ein Element $[K, kK']_G \in I$ mit $[K, kK']_G \neq [O^p(U), u_{p'}]_G$, so dass $e^{D(G)}_{(K,kK')}$ den Führer $|G| = |\tilde{G}|$ hat. Also ist K ein abelscher Normalteiler in G. Da $K/O^p(U)$ eine nicht-triviale p-Gruppe ist, ist die p-Sylowgruppe von K nicht-trivial und normal in G. $\square$

Korollar 2.4.3 *Es seien G und $\tilde{G}$ endliche Gruppen mit $D(G) \cong D(\tilde{G})$. Es sei p ein Primteiler von $|G|$ mit $p^2 \nmid |G|$, und es seien P und $\tilde{P}$ p-Sylowgruppen von G und $\tilde{G}$. Ist $\tilde{P}$ normal in $\tilde{G}$, so ist auch P normal in G.* $\square$

Satz 2.4.4 *Es seien G und $\tilde{G}$ endliche Gruppen mit $D(G) \cong D(\tilde{G})$. Es sei p ein Primteiler von $|G|$, und es seien P und $\tilde{P}$ p-Sylowgruppen von G und $\tilde{G}$. Ist $\tilde{P}$ abelsch, so ist auch P abelsch.*

Beweis: Es seien $\alpha : D(\tilde{G}) \to D(G)$ ein Isomorphismus, $\alpha(e^{D(\tilde{G})}_{(1,1)}) = e^{D(G)}_{(U,uU')}$ mit einem abelschen Normalteiler $U \trianglelefteq G$ und $u \in Z(G)$. Es seien $H := O^p(U)$ und $h := u_{p'}$. Nach Satz 2.4.1 ist

$$\alpha(e^{D(\tilde{G}),p}_{(1,1)}) = \sum_{[K,kK']_G \in I} e^{D(G)}_{(K,kK')}$$

mit $I = \{[K, kK']_G \in \mathcal{D}(G)/G : K = HV,\ V \leq P,\ k = hv,\ v \in V\}$. Es sei $\tilde{P}$ abelsch. Dann sind die Führer aller primitiven Idempotente $e^{D(\tilde{G})}_{(\tilde{K},\tilde{k}\tilde{K}')}$, $\tilde{K} \leq \tilde{P}$, $\tilde{k} \in \tilde{K}$, durch $|\tilde{P}|$ teilbar. Wegen

$$e^{D(\tilde{G}),p}_{(1,1)} = \sum_{\substack{[\tilde{K},\tilde{k},\tilde{K}']_{\tilde{G}} \in \mathcal{D}(\tilde{G})/\tilde{G} \\ \tilde{K} \leq \tilde{P}}} e^{D(\tilde{G})}_{(\tilde{K},\tilde{k}\tilde{K}')}$$

ist $|P| = |\tilde{P}|$ ein Teiler aller Führer der primitiven Idempotente $e^{D(G)}_{(K,kK')}$, $[K, kK']_G \in I$. Wir setzen $K := HP$. Dann ist $[K, hK']_G \in I$ und $p \nmid (N_G(K, hK') : K)$. Also ist $|P|$ ein Teiler von $(K : K')$, und damit ist $P \cap K' = 1$. Es folgt $P' \leq K' \cap P = 1$, also ist P abelsch. $\square$

Lemma 2.4.5 *Es seien G eine endliche Gruppe und $(H, hH') \in \mathcal{D}(G)$. Angenommen, es existieren $x \in D_{\mathbb{Q}}(G)$ und $n \in \mathbb{N}$, so dass $s^{D(G)}_{(H,hH')}(x)$ eine primitive n-te Einheitswurzel ist. Dann gilt:*

(i) Ist $2 \nmid n$ oder $4 \big| n$, so ist n ein Teiler von $|\langle h \rangle|$.

(ii) Ist $n = 2m$ mit $m \in \mathbb{N}$ und $2 \nmid m$, so ist m ein Teiler von $|\langle h \rangle|$.

Beweis: Es sei $\omega \in \mathbb{C}$ eine primitive $|\langle h \rangle|$-te Einheitswurzel. Für jede Untergruppe $U \leq G$ mit $H \leq U$ und jeden linearen Charakter $\psi \in \hat{U}$ ist dann $\psi(h) = \omega^i$ für ein $i \in \mathbb{N}$. Für ein beliebiges $[U, \psi]_G \in \mathcal{M}(G)/G$ ist dann

$$s^{D(G)}_{(H,hH')}([U, \psi]_G) = \sum_{\substack{gU \in G/U \\ H \leq {}^gU}} {}^g\psi(h) \in \mathbb{Q}(\omega).$$

Also ist $s^{D(G)}_{(H,hH')}(x) \in \mathbb{Q}(\omega)$. Da $\pm\omega^i$, $i \in \mathbb{N}$, die einzigen Einheitswurzeln in $\mathbb{Q}(\omega)$ sind, ist $s^{D(G)}_{(H,hH')}(x) \in \{\pm\omega^i : i \in \mathbb{N}\}$. Also ist n ein Teiler von

$$\max\{\mathrm{ord}(\pm\omega^i) : i \in \mathbb{N}\} \in \{\mathrm{ord}(\omega), \mathrm{ord}(-\omega)\}.$$

Im Fall $\mathrm{ord}(\omega) \geq \mathrm{ord}(-\omega)$ ist n ein Teiler von $|\langle h\rangle|$, und damit folgt (i) und (ii). Es sei also $2\mathrm{ord}(\omega) = \mathrm{ord}(-\omega)$. Dann ist $2 \nmid \mathrm{ord}(\omega)$, und wegen $n \mid \mathrm{ord}(-\omega)$ folgt $4 \nmid n$. Ist $2 \nmid n$, so folgt unmittelbar $n \mid \mathrm{ord}(\omega)$ und damit (i). Es sei nun $2 \mid n$. Wegen $n \mid \mathrm{ord}(-\omega) = 2\mathrm{ord}(\omega)$ ist dann $\frac{n}{2}$ ein Teiler von $\mathrm{ord}(\omega)$, und es folgt (ii). □

Satz 2.4.6 *Es seien G und $\tilde{G}$ endliche Gruppen mit $D(G) \cong D(\tilde{G})$, und es seien P und $\tilde{P}$ 2-Sylowgruppen von G und $\tilde{G}$. Ist P zyklisch, so ist auch $\tilde{P}$ zyklisch.*

Beweis: Es sei $P = \langle h\rangle$ und $|P| = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$. Wir können $n \geq 2$ annehmen. Es ist

$$(N_G(P) : C_G(P)) \mid |\mathrm{Aut}(P)| = 2^{n-1}.$$

Wegen $2 \nmid (N_G(P) : C_G(P))$ folgt $N_G(P) = C_G(P)$. Es sei $\lambda \in \hat{P}$, so dass $\lambda(h)$ eine primitive 2^n-te Einheitswurzel ist. Dann ist

$$s^{D(G)}_{(P,h)}\left(\frac{1}{(N_G(P) : P)}[P, \lambda]_G\right) = \frac{1}{(N_G(P) : P)} \sum_{gP \in N_G(P)/P} {}^g\lambda(h) = \lambda(h).$$

Es sei $\alpha : D(G) \to D(\tilde{G})$ ein Isomorphismus. Dann ist $s^{D(G)}_{(P,h)} = s^{D(\tilde{G})}_{(\tilde{H},\tilde{h}\tilde{H}')} \circ \alpha$ mit $(\tilde{H}, \tilde{h}\tilde{H}') \in \mathcal{D}(\tilde{G})$. Wir setzen

$$\tilde{x} := \alpha\left(\frac{1}{(N_G(P) : P)}[P, \lambda]_G\right) \in D_{\mathbb{Q}}(\tilde{G}).$$

Dann ist $s^{D(\tilde{G})}_{(\tilde{H},\tilde{h}\tilde{H}')}(\tilde{x}) = \lambda(h)$ eine primitive 2^n-te Einheitswurzel. Nach Lemma 2.4.5 ist 2^n ein Teiler von $|\langle\tilde{h}\rangle|$. Also existiert in $\tilde{G}$ ein Element der Ordnung 2^n. Damit ist $\tilde{P}$ zyklisch. □

2.5 Gruppen mit ungerader Ordnung

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass aus $D(G) \cong D(\tilde{G})$ mit endlichen Gruppen G und $\tilde{G}$ die Isomorphie der Burnsideringe $B(G) \cong B(\tilde{G})$ folgt, wenn man ungerade Gruppenordnung voraussetzt. Für eine endliche Gruppe G seien $\eta_G : B(G) \to D(G)$ die kanonische Einbettung und $\tau_G : D(G) \to B(G)$ die kanonische Projektion (siehe (2.1) und (2.2)).

Lemma 2.5.1 *Es sei G eine endliche Gruppe und $\zeta \in \mathbb{C}$ eine primitive $|G|$-te Einheitswurzel. Setzt man η_G und τ_G linear fort zu Abbildungen $\eta_G : B_{\mathbb{Q}(\zeta)}(G) \to D_{\mathbb{Q}(\zeta)}(G)$ und $\tau_G : D_{\mathbb{Q}(\zeta)}(G) \to B_{\mathbb{Q}(\zeta)}(G)$, so gilt für $H \leq G$ und $h \in H$*

$$\eta_G(e^{B(G)}_H) = \sum_{[H,gH']_G \in \mathcal{D}(G)/G} e^{D(G)}_{(H,gH')} \tag{2.21}$$

und

$$\tau_G(e^{D(G)}_{(H,hH')}) = \begin{cases} e^{B(G)}_H & \text{falls } hH' = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2.22}$$

Beweis: Für $H, U \leq G$ und $h \in H$ ist

$$s_H^{B(G)}([G/U]) = \sum_{\substack{gU \in G/U \\ H \leq {}^gU}} 1 = s_{(H,hH')}^{D(G)}([U,1]_G) = s_{(H,hH')}^{D(G)}(\eta_G([G/U])).$$

Damit ist $s_{(H,hH')}^{D(G)} \circ \eta_G = s_H^{B(G)}$ für alle $(H, hH') \in \mathcal{D}(G)$. Also gilt Gleichung (2.21). Weiterhin ist

$$\begin{aligned} \tau_G(e_{(H,1H')}^{D(G)}) &= \frac{|H'|}{|N_G(H)||H|} \sum_{L \leq H} |L|\mu(L,H) \sum_{\lambda \in \hat{H}} \lambda(1)\tau_G(\big[L, \lambda_{|L}\big]_G) \\ &= \frac{1}{|N_G(H)|} \sum_{L \leq H} |L|\mu(L,H)\,[G/L] = e_H^{B(G)} \end{aligned}$$

für $(H, 1H') \in \mathcal{D}(G)$. Für $H \leq G$ und $h \in H$ mit $hH' \neq 1$ ist $\sum_{\lambda \in \hat{H}} \lambda(h^{-1}) = 0$, also ist

$$\tau_G(e_{(H,hH')}^{D(G)}) = \frac{|H'|}{|N_G(H)||H|} \sum_{L \leq H} |L|\mu(L,H)[G/L] \sum_{\lambda \in \hat{H}} \lambda(h^{-1}) = 0.$$

Damit ist Gleichung (2.22) gezeigt. □

Lemma 2.5.2 *Es seien G und $\tilde{G}$ endliche Gruppen, und es sei $\alpha : D(G) \to D(\tilde{G})$ ein Isomorphismus mit*

$$\alpha(\{e_{(H,1H')}^{D(G)} : [H,1H']_G \in \mathcal{D}(G)/G\}) = \{e_{(\tilde{H},1\tilde{H}')}^{D(\tilde{G})} : [\tilde{H},1\tilde{H}']_G \in \mathcal{D}(\tilde{G})/\tilde{G}\}.$$

Dann ist $B(G) \cong B(\tilde{G})$.

Beweis: Es sei $\zeta \in \mathbb{C}$ eine primitive $|G|$-te Einheitswurzel. Es seien wieder $\eta_G : B(G) \to D(G)$, $\tilde{\eta}_{\tilde{G}} : B(\tilde{G}) \to D(\tilde{G})$ die kanonischen Einbettungen und $\tau_G : D(G) \to B(G)$, $\tilde{\tau}_{\tilde{G}} : D(\tilde{G}) \to B(\tilde{G})$ die kanonischen Projektionen. Wir setzen diese Abbildungen sowie auch den Isomorphismus α zu Abbildungen der entsprechenden erweiterten Ringe $B_{\mathbb{Q}(\zeta)}(G)$ bzw. $B_{\mathbb{Q}(\zeta)}(\tilde{G})$ und $D_{\mathbb{Q}(\zeta)}(G)$ bzw. $D_{\mathbb{Q}(\zeta)}(\tilde{G})$ fort. Nach Voraussetzung ist $\alpha(\{e_{(H,1H')}^{D(G)} : [H,1H']_G \in \mathcal{D}(G)/G\}) = \{e_{(\tilde{H},1\tilde{H}')}^{D(\tilde{G})} : [\tilde{H},1\tilde{H}']_{\tilde{G}} \in \mathcal{D}(\tilde{G})/\tilde{G}\}$. Unter Berücksichtigung von Lemma 2.5.1 erhalten wir durch

$$\begin{aligned} \beta : B_{\mathbb{Q}(\zeta)}(G) &\to B_{\mathbb{Q}(\zeta)}(\tilde{G}) \\ e_H^{B(G)} &\mapsto (\tilde{\tau}_{\tilde{G}} \circ \alpha)(e_{(H,1H')}^{D(G)}) \end{aligned}$$

einen $\mathbb{Q}(\zeta)$-Algebra-Isomorphismus mit inverser Abbildung

$$\begin{aligned} \beta^{-1} : B_{\mathbb{Q}(\zeta)}(\tilde{G}) &\to B_{\mathbb{Q}(\zeta)}(G) \\ e_{\tilde{H}}^{B(\tilde{G})} &\mapsto (\tau_G \circ \alpha^{-1})(e_{(\tilde{H},1\tilde{H}')}^{D(\tilde{G})}). \end{aligned}$$

Es seien $(H, hH') \in \mathcal{D}(G)$ und $\alpha(e_{(H,hH')}^{D(G)}) = e_{(\tilde{H},\tilde{h}\tilde{H}')}^{D(\tilde{G})}$. Aus Lemma 2.5.1 folgt im Fall $hH' = 1$

$$(\beta \circ \tau_G)(e_{(H,1H')}^{D(G)}) = \beta(e_H^{B(G)}) = (\tilde{\tau}_{\tilde{G}} \circ \alpha)(e_{(H,1H')}^{D(G)}).$$

Im Fall $hH' \neq 1$ ist $\tilde{h}\tilde{H}' \neq 1$, und damit folgt aus Lemma 2.5.1

$$(\beta \circ \tau_G)(e^{D(G)}_{(H,hH')}) = \beta(0) = 0 = \tilde{\tau}_{\tilde{G}}(e^{D(\tilde{G})}_{(\tilde{H},\tilde{h}\tilde{H}')}) = (\tilde{\tau}_{\tilde{G}} \circ \alpha)(e^{D(G)}_{(H,hH')}).$$

Da die primitiven Idempotente von $D_{\mathbb{Q}(\zeta)}(G)$ eine $\mathbb{Q}(\zeta)$-Basis von $D_{\mathbb{Q}(\zeta)}(G)$ bilden, ist

$$\beta \circ \tau_G = \tilde{\tau}_{\tilde{G}} \circ \alpha. \tag{2.23}$$

Umgekehrt erhält man mit der gleichen Überlegung

$$\beta^{-1} \circ \tilde{\tau}_{\tilde{G}} = \tau_G \circ \alpha^{-1}. \tag{2.24}$$

Wir setzen nun

$$\begin{aligned} \gamma : B(G) &\rightarrow B(\tilde{G}) \\ x &\mapsto (\tilde{\tau}_{\tilde{G}} \circ \alpha \circ \eta_G)(x) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \gamma^* : B(\tilde{G}) &\rightarrow B(G) \\ \tilde{x} &\mapsto (\tau_G \circ \alpha^{-1} \circ \tilde{\eta}_{\tilde{G}})(\tilde{x}). \end{aligned}$$

Dann sind γ und γ^* Ringhomomorphismen. Wegen den Gleichungen (2.23) und (2.24) und $\tau_G \circ \eta_G = \mathrm{id}_{B(G)}$ bzw. $\tilde{\tau}_{\tilde{G}} \circ \tilde{\eta}_{\tilde{G}} = \mathrm{id}_{B(\tilde{G})}$ folgt

$$\gamma^* \circ \gamma = \tau_G \circ \alpha^{-1} \circ \tilde{\eta}_{\tilde{G}} \circ \tilde{\tau}_{\tilde{G}} \circ \alpha \circ \eta_G = \beta^{-1} \circ \tilde{\tau}_{\tilde{G}} \circ \tilde{\eta}_{\tilde{G}} \circ \beta \circ \tau_G \circ \eta_G = \mathrm{id}_{B(G)}$$

und

$$\gamma \circ \gamma^* = \tilde{\tau}_{\tilde{G}} \circ \alpha \circ \eta_G \circ \tau_G \circ \alpha^{-1} \circ \tilde{\eta}_{\tilde{G}} = \beta \circ \tau_G \circ \eta_G \circ \beta^{-1} \circ \tilde{\tau}_{\tilde{G}} \circ \tilde{\eta}_{\tilde{G}} = \mathrm{id}_{B(\tilde{G})}.$$

Also ist $\gamma^* = \gamma^{-1}$, und damit ist γ ein Isomorphismus. □

Satz 2.5.3 *Es sei G eine endliche Gruppe mit ungerader Ordnung, und es sei $(H, hH') \in \mathcal{D}(G)$ mit $hH' \neq 1$. Dann existiert ein $x \in D(G)$ mit $s^{D(G)}_{(H,hH')}(x) \notin \mathbb{Z}$.*

Beweis: Wir setzen $\bar{H} := H/H'$, $\bar{U} := N_G(H)/H'$ und $\bar{K} := \langle hH' \rangle \leq \bar{H}$. Dann existiert ein Primteiler $p \neq 2$ von $|\bar{K}|$. Es sei $\xi \in \mathbb{C}$ eine primitive p-te Einheitswurzel, und es sei $\bar{\varphi} \in \mathrm{Hom}(\bar{K}, \mathbb{C}^\times)$ definiert durch $\bar{\varphi}(hH') := \xi$. Es seien weiterhin

$$\bar{\varphi}^\circ : \bar{H} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \bar{\varphi}^\circ(g) := \begin{cases} \bar{\varphi}(g) & \text{falls } g \in \bar{K} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und $\bar{\psi} := \mathrm{ind}_{\bar{K}}^{\bar{H}} \bar{\varphi}$ der induzierte Charakter, der durch

$$\bar{\psi}(g) := \frac{1}{|\bar{K}|} \sum_{u \in \bar{H}} \bar{\varphi}^\circ(ugu^{-1})$$

für $g \in \bar{H}$ definiert ist. Da $\bar{H}$ abelsch ist, ist $\bar{\psi} = m\bar{\varphi}^\circ$ mit $m := (\bar{H} : \bar{K})$. Es sei nun

$$\{\bar{\chi} \in \mathrm{Irr}(\bar{H}) : \bar{\chi}_{|\bar{K}} = \bar{\varphi}\} = \{\bar{\chi}_1, ..., \bar{\chi}_m\}.$$

Dann ist $\bar{\psi} = \bar{\chi}_1 + ... + \bar{\chi}_m$. Es seien $\chi_1, ..., \chi_m \in \mathrm{Irr}(H)$ die linearen Charaktere von H mit $\chi_i(g) := \bar{\chi}_i(gH')$ für $g \in H$ und $i \in \{1, ..., m\}$. Wir setzen

$$x := [H, \chi_1]_G + ... + [H, \chi_m]_G \in D(G).$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
s^{D(G)}_{(H,hH')}(x) &= s^{D(G)}_{(H,hH')}([H,\chi_1]_G) + ... + s^{D(G)}_{(H,hH')}([H,\chi_m]_G) \\
&= \sum_{gH \in N_G(H)/H} \chi_1(h^g) + ... + \sum_{gH \in N_G(H)/H} \chi_m(h^g) \\
&= \sum_{g\bar{H} \in \bar{U}/\bar{H}} \bar{\chi}_1((hH')^g) + ... + \sum_{g\bar{H} \in \bar{U}/\bar{H}} \bar{\chi}_m((hH')^g) \\
&= \sum_{g\bar{H} \in \bar{U}/\bar{H}} (\bar{\chi}_1 + ... + \bar{\chi}_m)((hH')^g) \\
&= \sum_{g\bar{H} \in \bar{U}/\bar{H}} \bar{\psi}((hH')^g) = \sum_{g\bar{H} \in N_{\bar{U}}(\bar{K})/\bar{H}} \bar{\psi}((hH')^g) = m \sum_{g\bar{H} \in N_{\bar{U}}(\bar{K})/\bar{H}} \bar{\varphi}((hH')^g).
\end{aligned}$$

Für $g \in N_{\bar{U}}(\bar{K})$ ist $(hH')^g = (hH')^s$ mit $s \in \mathbb{N}$ und $\mathrm{ggT}(s, |\bar{K}|) = 1$. Also ist $\bar{\varphi}((hH')^g) = \xi^k$ mit $k \in \{1, ..., p-1\}$ für $g \in N_{\bar{U}}(\bar{K})$. Dann existieren Zahlen $a_1, ..., a_{p-1} \in \mathbb{N}_0$ mit

$$\sum_{g\bar{H} \in N_{\bar{U}}(\bar{K})/\bar{H}} \bar{\varphi}((hH')^g) = a_1\xi + a_2\xi^2 + ... + a_{p-1}\xi^{p-1}$$

und $a_1 + ... + a_{p-1} = (N_{\bar{U}}(\bar{K}) : \bar{H})$. Damit ist $s^{D(G)}_{(H,hH')}(x) = b_1\xi + b_2\xi^2 + ... + b_{p-1}\xi^{p-1}$ mit $b_i = ma_i$ für $i = 1, ..., p-1$. Es folgt

$$b_1 + ... + b_{p-1} = (N_{\bar{U}}(\bar{K}) : \bar{H})(\bar{H} : \bar{K}) = (N_{\bar{U}}(\bar{K}) : \bar{K}) \not\equiv 0 \pmod 2.$$

Wir nehmen an, dass $s^{D(G)}_{(H,hH')}(x) = -z \in \mathbb{Z}$ ist. Dann ist

$$f := b_{p-1}X^{p-1} + ... + b_1X + z \in \mathbb{Z}[X]$$

ein Polynom mit $f(\xi) = 0$. Das Minimalpolynom von $\xi \in \mathbb{Q}(\xi)$ über $\mathbb{Q}$ ist von der Form $X^{p-1} + ... + X + 1$ und ist ein Teiler von f. Also ist $b_{p-1} = ... = b_1 = z$, und es folgt $b_1 + ... + b_{p-1} = (p-1)z$, was wegen $p \neq 2$ im Widerspruch zu $b_1 + ... + b_{p-1} \not\equiv 0 \pmod 2$ steht. Also ist $s^{D(G)}_{(H,hH')}(x) \notin \mathbb{Z}$. Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Als unmittelbare Folgerung erhält man den folgenden Satz.

Satz 2.5.4 *Es seien G und $\tilde{G}$ Gruppen mit ungerader Ordnung. Ist $D(G) \cong D(\tilde{G})$, so ist $B(G) \cong B(\tilde{G})$.*

Beweis: Es sei $\alpha : D(G) \to D(\tilde{G})$ ein Isomorphismus, und es seien $(H, hH') \in \mathcal{D}(G)$ und $(\tilde{H}, \tilde{h}\tilde{H}') \in \mathcal{D}(\tilde{G})$ mit

$$s^{D(\tilde{G})}_{(\tilde{H},\tilde{h}\tilde{H}')} \circ \alpha = s^{D(G)}_{(H,hH')}.$$

Nun ist genau dann $s^{D(\tilde{G})}_{(\tilde{H},\tilde{h}\tilde{H}')}(\tilde{x}) \in \mathbb{Z}$ für alle $\tilde{x} \in D(\tilde{G})$, wenn $s^{D(G)}_{(H,hH')}(x) \in \mathbb{Z}$ für alle $x \in D(G)$ ist. Nach Satz 2.5.3 ist demnach genau dann $\tilde{h}\tilde{H}' = 1$, wenn $hH' = 1$ ist. Also ist

$$\alpha(\{e^{D(G)}_{(H,1H')} : [H, 1H']_G \in \mathcal{D}(G)/G\}) = \{e^{D(\tilde{G})}_{(\tilde{H},1\tilde{H}')} : [\tilde{H}, 1\tilde{H}']_{\tilde{G}} \in \mathcal{D}(\tilde{G})/\tilde{G}\}.$$

Nach Lemma 2.5.2 ist $B(G) \cong B(\tilde{G})$. □

Bemerkung 2.5.5

Eine Analogie zu Satz 2.5.3 ist beim Charakterring durch den folgenden Satz von Burnside gegeben: *Für jeden nicht-trivialen Charakter $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ einer endlichen Gruppe G mit ungerader Ordnung gilt $\chi \neq \bar{\chi}$.*
Es soll weiterhin angemerkt werden, dass für symmetrische Gruppen die Spezieswerte von $D(G)$ nicht notwendig aus $\mathbb{Z}$ sein müssen. Es gibt also keine Analogie zur entsprechenden Situation beim Charakterring. Wir betrachten beispielsweise $G := S_5$ und

$$H := \langle (1, 2, 3, 4, 5), (1, 2, 4, 3)\rangle \leq S_5.$$

Es ist $N_G(H) = H$ und $H' = \langle (1, 2, 3, 4, 5)\rangle$. Wir setzen $h := (1, 2, 4, 3)$ und definieren $\varphi \in \hat{H}$ durch $\varphi(h) := i$. Dann ist

$$s^{D(G)}_{(H,hH')}([H, \varphi]_G) = \sum_{gH \in N_G(H)/H} {}^g\varphi(h) = i \notin \mathbb{Z}.$$

2.6 Die Gruppe der Torsionseinheiten

Für einen kommutativen Ring R mit Einselement bezeichnen wir mit $U_T(R)$ die Gruppe der Torsionseinheiten von R. Die folgenden Sätze sind angelehnt an die Methoden zur Bestimmung der Einheitengruppe des Burnsideringes in [Ma83] und [Ka].

Lemma 2.6.1 *Es sei R ein kommutativer Ring mit Einselement. Es seien A, B additive Untergruppen von R mit den Eigenschaften*

$$R = A \oplus B,\ A^2 \subseteq A,\ B^2 \subseteq B,\ AB \subseteq A \text{ und } 1 \in B.$$

Also ist A ein Ideal in R und B ein unitärer Teilring von R. Ferner existiere eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $u^n = 1$ für alle $u \in U_T(R)$. Dann gilt:

(i) Jede Torsionseinheit $u \in U_T(R)$ kann eindeutig in der Form $u = b(1+a)$ mit $b \in U_T(B)$ und $a \in \tilde{A} := \{a \in A : \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k = 0\}$ geschrieben werden. Umgekehrt ist für alle $b \in U_T(B)$ und alle $a \in \tilde{A}$ das Element $b(1 + a)$ eine Torsionseinheit von R.

(ii) Falls $U_T(R)$ endlich ist, gilt $|U_T(R)| = |U_T(B)||\tilde{A}|$.

Beweis: Wegen $0 \in \tilde{A}$ ist $\tilde{A} \neq \emptyset$. Es seien $b \in U_T(B)$ und $a \in \tilde{A}$. Dann ist

$$(b(1+a))^n = (1+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k = 1,$$

also ist $b(1+a) \in U_T(R)$.
Es sei umgekehrt $u \in U_T(R)$. Dann existieren eindeutig bestimmte Elemente $a \in A$ und $b \in B$ mit $u = a + b$. Es folgt

$$1 = u^n = (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + b^n,$$

wobei $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \in A$ und $b^n - 1 \in B$ sind. Wegen $R = A \oplus B$ folgt $b^n - 1 = 0$ und damit $b \in U_T(B)$. Setzt man $c := ab^{n-1} \in A$, so ist $b(1+c) = b + a = u$. Wegen

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} c^k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (ab^{n-1})^k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n - b^n = 1 - b^n = 0$$

ist $c \in \tilde{A}$.
Es seien nun $b_1, b_2 \in U_T(B)$ und $c_1, c_2 \in \tilde{A}$ mit $b_1(1+c_1) = b_2(1+c_2)$. Dann ist $b_1 - b_2 + b_1c_1 - b_2c_2 = 0$, und wegen $b_1, b_2 \in B$, $b_1c_1, b_2c_2 \in A$ und $R = A \oplus B$ folgt $b_1 = b_2$ und $c_1 = c_2$. Damit ist Teil (i) bewiesen. Teil (ii) folgt unmittelbar aus Teil (i). □

Eine partiell geordnete Menge $(I, \leq)$ heißt *starr*, falls gilt:

(i) I besitzt ein größtes Element e und ein kleinstes Element 0.

(ii) Jede Teilmenge $M_{i,j} := \{k \in I : k \leq i, k \leq j\}$, $i, j \in I$, besitzt ein größtes Element $m(i,j)$. Das heißt, je zwei Elemente $i, j \in I$ besitzen ein Infimum in I.

Bemerkung 2.6.2 Ist I eine partiell geordnete, starre Menge, so gilt $m(i,i) = i$, $m(i,0) = 0$ und $m(e,i) = i$ für alle $i \in I$.

Satz 2.6.3 *Es sei R ein kommutativer Ring mit Einselement, und es sei $(I, \leq)$ eine partiell geordnete, starre, endliche Menge. Es existiere eine Familie $\{R(i) : i \in I\}$ von additiven Untergruppen von R mit den folgenden Eigenschaften:*

1. *$R = \bigoplus_{i \in I} R(i)$ (direkte Summe der additiven Gruppen),*
2. *$R(e) = \mathbb{Z}H$ mit einer endlichen Gruppe $H \leq U_T(R)$,*
3. *$R(i)R(j) \subseteq R(m(i,j))$ für alle $i, j \in I$.*

Es existiere ferner ein $n \in \mathbb{N}$ mit $u^n = 1$ für alle $u \in U_T(R)$. Für $i \in I \backslash \{e\}$ setzen wir

$$R_i := \{a \in R(i) : \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k = 0\}.$$

Dann gilt:

(i) *Jede Einheit $u \in U_T(R)$ kann eindeutig in der Form*

$$u = g \prod_{i \in I \setminus \{e\}} (1 + a_i)$$

mit $a_i \in R_i$ und $g \in \pm H$ geschrieben werden. Umgekehrt ist jedes Element von dieser Form eine Torsionseinheit in R.

(ii) *Ist $U_T(R)$ endlich, so ist $|U_T(R)| = 2|H| \prod_{i \in I \setminus \{e\}} |R_i|$.*

Beweis: Der erste Teil von Behauptung (i) wird durch vollständige Induktion nach $|I|$ bewiesen. Im Fall $|I| = 1$ ist $R = R(e) = \mathbb{Z}H$. Da H eine abelsche Gruppe ist, folgt $U_T(\mathbb{Z}H) = \pm H$ (siehe [Hi40]).
Es sei nun $|I| = 2$, das heißt $I = \{0, e\}$. Dann ist $R = R(0) \oplus R(e)$. Wegen $m(i,i) = i$ und $m(i,0) = 0$ für $i \in I$ folgt

$$R(0)R(0) \subseteq R(0),\ R(e)R(e) \subseteq R(e),\ R(0)R(e) \subseteq R(0) \ \text{ und } \ 1 \in R(e).$$

Nach Lemma 2.6.1 mit $A := R(0)$ und $B := R(e)$ kann jede Torsionseinheit $u \in U_T(R)$ eindeutig in der Form $u = g(1+a)$ mit $a \in R_0$ und $g \in U_T(R(e)) = \pm H$ dargestellt werden. Umgekehrt folgt aus Lemma 2.6.1, dass jedes $u = g(1+a)$ mit $g \in \pm H$ und $a \in R_0$ eine Torsionseinheit von R ist.
Es sei $|I| \geq 3$, und es sei k ein maximales Element der Menge $\{i \in I : i < e\}$. Wir setzen $J := I \setminus \{k\}$, $A := \bigoplus_{j \in J \setminus \{e\}} R(j)$ und $B := R(e) \oplus R(k)$. Dann ist

$$R = A \oplus B,\ A^2 \subseteq A,\ B^2 \subseteq B,\ AB \subseteq A \ \text{ und } \ 1 \in R(e) \subseteq B.$$

Es sei $u \in U_T(R)$. Nach Lemma 2.6.1 kann u eindeutig in der Form $u = b(1+a)$ mit $b \in U_T(B) = U_T(R(e) \oplus R(k))$ und $a \in \tilde{A} := \{a \in A : \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k = 0\}$ geschrieben werden. Wegen

$$R(e)^2 \subseteq R(e),\ R(k)^2 \subseteq R(k),\ R(e)R(k) \subseteq R(k) \text{ und } 1 \in R(e)$$

kann Lemma 2.6.1 auch auf den unitären Teilring $B = R(e) \oplus R(k)$ angewendet werden. Also kann b in eindeutiger Weise in der Form $b = g(1+a_k)$ mit $g \in U_T(R(e)) = \pm H$ und $a_k \in R_k$ dargestellt werden. Damit ist $u = g(1+a_k)(1+a)$.
Nun ist $\bigoplus_{j \in J} R(j)$ ein kommutativer Ring mit Einselement, und J ist eine partiell geordnete, starre, endliche Menge mit $|J| < |I|$, so dass alle Voraussetzungen aus dem Satz erfüllt sind. Wegen

$$(1+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k = 1$$

ist $1+a \in U_T(\bigoplus_{j \in J} R(j))$, und nach Induktionsvoraussetzung folgt $1+a = h \prod_{j \in J \setminus \{e\}} (1+a_j)$ mit eindeutig bestimmten $h \in \pm H$ und $a_j \in R_j$. Also ist $u = gh \prod_{i \in I \setminus \{e\}} (1+a_i)$.
Es sei $u = g' \prod_{i \in I \setminus \{e\}} (1+a_i')$ mit $g' \in \pm H$ und $a_i' \in R_i$. Dann ist

$$1 = gh(g')^{-1} \prod_{i \in I \setminus \{e\}} (1+a_i)(1+a_i')^{-1}.$$

Wegen $(1+a_i') \in U_T(R)$ existieren $s_i \in \mathbb{N}$ mit $(1+a_i')^{s_i} = (1+a_i')^{-1}$ für alle $i \in I\backslash\{e\}$. Da $R(i)^2 \subseteq R(i)$ ist, existieren $c_i \in R(i)$ mit $(1+a_i)(1+a_i')^{-1} = (1+a_i)(1+a_i')^{s_i} = 1+c_i$ für alle $i \in I\backslash\{e\}$. Also ist

$$1 = gh(g')^{-1} \prod_{i\in I\backslash\{e\}} (1+c_i). \tag{2.25}$$

Wegen $R(e)R(i) \subseteq R(i)$ für alle $i \in I$ sieht man durch Ausmultiplizieren von (2.25), dass $1 = gh(g')^{-1} + r_1$ mit $r_1 \notin R(e)$ ist. Aus $R = \bigoplus_{i\in I} R(i)$ folgt also $gh(g')^{-1} = 1$ und damit $gh = g'$. Angenommen, es ist $c_i \neq 0$ für ein $i \in I\backslash\{e\}$. Wir wählen $i \in I\backslash\{e\}$ maximal mit der Eigenschaft $c_i \neq 0$. Ist nun $j \in I\backslash\{e, i\}$ mit $c_j \neq 0$, so folgt aus der Maximalität von i unmittelbar $m(i, j) \neq i$. Also ist $c_i c_j \notin R(i)$. Nach Ausmultiplizieren von (2.25) ist $1 = 1 + c_i + r_2$ mit $r_2 \notin R(i)$. Wegen $R = \bigoplus_{i\in I} R(i)$ folgt $c_i = 0$, was im Widerspruch zur Annahme steht. Also ist $c_i = 0$ für alle $i \in I\backslash\{e\}$. Damit ist $1 + a_i = 1 + a_i'$ für alle $i \in I\backslash\{e\}$, und es folgt die Eindeutigkeit der Darstellung $u = gh \prod_{i\in I\backslash\{e\}}(1 + a_i)$.
Umgekehrt ist wegen $g \in U_T(R)$ für alle $g \in \pm H$ und $1 + a_i \in U_T(R)$ für alle $a_i \in R_i$ das Element $g \prod_{i\in I\backslash\{e\}}(1 + a_i) \in U_T(R)$. Damit ist Behauptung (i) gezeigt.
Teil (ii) folgt unmittelbar aus Teil (i). □

Es sei G eine endliche Gruppe, und es sei $\mathcal{N}(G)$ die Menge der Normalteiler von G. Wir sagen, eine Teilmenge $S \subseteq \mathcal{N}(G)$ habe Eigenschaft $(*)$, falls gilt:

1. $1, G \in S$
2. Aus $M, N \in S$ folgt $MN \in S$ und $M \cap N \in S$.

Es sei S eine Teilmenge von $\mathcal{N}(G)$ mit Eigenschaft $(*)$. Für $N \in S$ bezeichnen wir mit $S(N)$ die Menge aller Elemente $[K, \psi]_G \in \mathcal{M}(G)/G$, die folgendes erfüllen:

1. $N \leq K$.
2. Aus $N \leq M \leq K$ und $M \in S$ folgt $N = M$.

Bemerkung 2.6.4 Wegen $[N, 1]_G \in S(N)$ ist $S(N) \neq \emptyset$ für $N \in S$. Weiterhin ist $\{S(N) : N \in S\}$ eine partiell geordnete, starre, endliche Menge. Dabei ist $S(L) \leq S(M)$ für $L, M \in S$, wenn $L \leq M$ ist. Ferner ist $S(G)$ das größte und $S(1)$ das kleinste Element von $\{S(N) : N \in S\}$. Das Infimum zweier Elemente $S(L), S(M) \in \{S(N) : N \in S\}$ ist gegeben durch $S(L \cap M)$. Ferner ist $(S(G), \cdot)$ eine Untergruppe von $U_T(D(G))$ mit $S(G) \cong \hat{G}$. Weiterhin soll angemerkt werden, dass aus $[K, \psi]_G \in S(N)$ für $N \in S$ stets $N \leq {}^gK$ für alle $g \in G$ folgt. Die obige Definition von $S(N)$ hängt also nicht von der Wahl der repräsentativen Untergruppe K der Bahn $[K, \psi]_G$ ab.

Es sei $T \subseteq \mathcal{M}(G)/G$. Mit $D(G)_T$ wird die additive Untergruppe von $D(G)$ bezeichnet, die durch die Elemente $[H, \varphi]_G \in T$ erzeugt wird. Wir setzen $D(G)_T = \{0\}$, wenn $T = \emptyset$ ist.

Lemma 2.6.5 *Es sei $S \subseteq \mathcal{N}(G)$ mit der Eigenschaft $(*)$. Dann gilt:*

(i) $D(G) = \bigoplus_{N\in S} D(G)_{S(N)}$ *(direkte Summe additiver Untergruppen),*

(ii) $D(G)_{S(M)}D(G)_{S(N)} \subseteq D(G)_{S(M\cap N)}$ *für* $M, N \in S$,

(iii) $D(G)_{S(G)} = \mathbb{Z}S(G) \cong \mathbb{Z}\hat{G}$.

Beweis: Wir zeigen zunächst

$$\mathcal{M}(G)/G = \biguplus_{N \in S} S(N).$$

Es sei $[K,\psi]_G \in S(M) \cap S(N)$ mit $M, N \in S$. Dann ist $M \leq MN \leq K$ und $N \leq NM \leq K$. Wegen $MN \in S$ folgt $M = MN = N$. Also ist $S(M) \cap S(N) = \emptyset$ für $M, N \in S$ mit $M \neq N$. Es sei $[K,\psi]_G \in \mathcal{M}(G)/G$. Wir setzen $X_K := \{N \in S : N \leq K\}$. Wegen $1 \in S$ ist $X_K \neq \emptyset$. Es sei $N_0 := \prod_{N \in X_K} N$. Da S Eigenschaft $(*)$ hat, ist $N_0 \in S$, und damit ist $N_0 \in X_K$. Dann ist $[K,\psi]_G \in S(N_0)$, und es gilt $\mathcal{M}(G)/G = \biguplus_{N \in S} S(N)$. Es folgt (i).
Es seien nun $[H,\varphi]_G \in S(M)$ und $[K,\psi]_G \in S(N)$ mit $M, N \in S$. Wegen

$$[H,\varphi]_G[K,\psi]_G = \sum_{HgK \in H\backslash G/K} [H \cap {}^gK, \varphi \cdot {}^g\psi]_G$$

ist zu zeigen, dass $[H \cap {}^gK, \varphi \cdot {}^g\psi]_G \in S(M \cap N)$ für alle $g \in G$ ist. Es ist $M \leq H$ und $N \leq {}^gK$ für $g \in G$, also ist $M \cap N \leq H \cap {}^gK$ für alle $g \in G$. Ist nun $M \cap N \leq L \leq H \cap {}^gK$ für ein $L \in S$ und ein $g \in G$, so folgt

$$M \leq ML \leq M(H \cap {}^gK) \leq H \quad \text{und} \quad N \leq NL \leq N(H^g \cap K) \leq K.$$

Wegen $[H,\varphi]_G \in S(M)$ und $[K,\psi]_G \in S(N)$ erhält man $M = ML$ und $N = NL$. Dann ist $L \leq M \cap N$, und somit ist $L = M \cap N$. Also ist $[H \cap {}^gK, \tau]_G \in S(M \cap N)$ für alle $g \in G$ und alle linearen Charaktere τ von $H \cap {}^gK$. Damit ist (ii) bewiesen.
Teil (iii) folgt unmittelbar aus Bemerkung 2.6.4 und aus der Definition von $D(G)_{S(G)}$. □

Bemerkung 2.6.6 Es sei $\zeta \in \mathbb{C}$ eine primitive $|G|$-te Einheitswurzel. Jede Torsionseinheit $u \in U_T(D(G))$ ist von der Form

$$u = \sum_{[H,hH']_G \in \mathcal{D}(G)/G} u_{[H,hH']} e^{D(G)}_{(H,hH')}$$

mit $u_{[H,hH']} \in \{\pm\zeta^i : i \in \mathbb{N}\}$ für alle $[H,hH']_G \in \mathcal{D}(G)/G$. Also ist $U_T(D(G))$ eine endliche Gruppe. Insbesondere ist der Exponent $\exp(U_T(D(G)))$ von $U_T(D(G))$ ein Teiler von $2|G|$.

Aus Satz 2.6.3, Lemma 2.6.5 und Bemerkung 2.6.6 folgt:

Satz 2.6.7 *Es seien G eine endliche Gruppe und S eine Teilmenge von $\mathcal{N}(G)$ mit der Eigenschaft $(*)$. Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $\exp(U_T(D(G))) \mid n$. Für $H \in S$ setzen wir*

$$H^* := \{a \in D(G)_{S(H)} : \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k = 0\}.$$

Dann gilt:

(i) Jede Torsionseinheit $u \in U_T(D(G))$ kann eindeutig in der Form

$$u = \pm[G,\psi]_G \prod_{H \in S \setminus \{G\}} (1 + u_H)$$

mit $u_H \in H^*$ und $\psi \in \hat{G}$ dargestellt werden.

(ii) Es ist $|U_T(D(G))| = 2|\hat{G}|(\prod_{H\in S\setminus\{G\}} |H^*|)$. □

Beispiel 2.6.8 Es sei G die symmetrische Gruppe S_3. Wir bestimmen im folgenden die Gruppe der Torsionseinheiten von $D(G)$. Die Bezeichnungen werden aus Beispiel 2.2.1 und Satz 2.6.7 übernommen. Wir wählen

$$S := \{1, C_3, G\}.$$

Dann ist

$$S(1) = \{[1,1]_G, [C_2,1]_G, [C_2,\psi]_G\}, \quad S(C_3) = \{[C_3,1]_G, [C_3,\varphi]_G\}, \quad S(G) = \{[G,1]_G, [G,\lambda]_G\}.$$

Da die Speziestafel von $D(G)$ nur ganze Zahlen beinhaltet, ist $u^2 = 1$ für alle $u \in U_T(D(G))$, und es gilt $\exp(U_T(D(G))) = 2$. Wir setzen $n := 2$. Nach Satz 2.6.7 ist jede Torsionseinheit $u \in U_T(D(G))$ von der Form

$$u = \pm[G,\omega]_G(1 + u_{C_3})(1 + u_1)$$

mit $\omega \in \{1, \lambda\}$, $u_{C_3} \in C_3^*$ und $u_1 \in 1^*$. Es ist

$$C_3^* = \{a \in D(G)_{S(C_3)} : a^2 + 2a = 0\} \quad \text{und} \quad 1^* = \{a \in D(G)_{S(1)} : a^2 + 2a = 0\}.$$

Wir berechnen zuerst C_3^*. Es sei $a := x[C_3,1]_G + y[C_3,\varphi]_G \in C_3^*$ mit $x, y \in \mathbb{Z}$. Wegen

$$[C_3,1]_G^2 = 2[C_3,1]_G, \quad [C_3,\varphi]_G^2 = [C_3,1]_G + [C_3,\varphi]_G \quad \text{und} \quad [C_3,1]_G[C_3,\varphi]_G = 2[C_3,\varphi]_G$$

folgt

$$\begin{aligned} a^2 + 2a =& x^2[C_3,1]_G^2 + 2xy[C_3,1]_G[C_3,\varphi]_G + y^2[C_3,\varphi]_G^2 + 2x[C_3,1]_G + 2y[C_3,\varphi]_G \\ =& 2x^2[C_3,1]_G + 4xy[C_3,\varphi]_G + y^2[C_3,1]_G + y^2[C_3,\varphi]_G + 2x[C_3,1]_G + 2y[C_3,\varphi]_G \\ =& (2x^2 + y^2 + 2x)[C_3,1]_G + (4xy + y^2 + 2y)[C_3,\varphi]_G = 0. \end{aligned}$$

Also ist $2x^2 + y^2 + 2x = 0 = 4xy + y^2 + 2y$. Ist $y \neq 0$, so ist $2x^2 + 2x = 2x(x+1) < 0$, was aber keine Lösung in $\mathbb{Z}$ besitzt. Also ist $y = 0$, und aus $2x^2 + 2x = 0$ folgt $x \in \{0, -1\}$. Wegen $4xy + y^2 + 2y = 0$ für $y = 0$ ist

$$C_3^* = \{0, -[C_3,1]_G\}.$$

Wir berechnen nun 1^*. Es sei $a := x[1,1]_G + y[C_2,1]_G + z[C_2,\psi]_G \in 1^*$ mit $x, y, z \in \mathbb{Z}$. Wegen

$$[1,1]_G^2 = 6[1,1]_G, \quad [C_2,1]_G^2 = [C_2,1]_G + [1,1]_G = [C_2,\psi]_G^2,$$

$$[1,1]_G[C_2,1]_G = 3[1,1]_G = [1,1]_G[C_2,\psi]_G, \quad [C_2,1]_G[C_2,\psi]_G = [C_2,\psi]_G + [1,1]_G$$

ist

$$\begin{aligned} a^2 + 2a =& x^2[1,1]_G^2 + y^2[C_2,1]_G^2 + z^2[C_2,\psi]_G^2 + 2xy[1,1]_G[C_2,1]_G + 2xz[1,1]_G[C_2,\psi]_G \\ &+ 2yz[C_2,1]_G[C_2,\psi]_G + 2x[1,1]_G + 2y[C_2,1]_G + 2z[C_2,\psi]_G \\ =& 6x^2[1,1]_G + y^2([C_2,1]_G + [1,1]_G) + z^2([C_2,1]_G + [1,1]_G) + (6xy + 6xz)[1,1]_G \\ &+ 2yz([C_2,\psi]_G + [1,1]_G) + 2x[1,1]_G + 2y[C_2,1]_G + 2z[C_2,\psi]_G \\ =& (6x^2 + y^2 + z^2 + 6xy + 6xz + 2yz + 2x)[1,1]_G + (y^2 + z^2 + 2y)[C_2,1]_G \\ &+ (2yz + 2z)[C_2,\psi]_G = 0. \end{aligned}$$

Dann ist $(6x^2+y^2+z^2+6xy+6xz+2yz+2x) = (y^2+z^2+2y) = (2yz+2z) = 0$. Ist $z \neq 0$, so ist $2y+2=0$, also ist $y=-1$. Wegen $y^2+z^2+2y=0$ folgt $z^2=1$. Ist $z=1$, so ist $6x^2+y^2+z^2+6xy+6xz+2yz+2x = 6x^2+2x = 2x(3x+1) = 0$, also ist $x=0$. Ist $z=-1$, so ist $6x^2+y^2+z^2+6xy+6xz+2yz+2x = 6x^2-10x+4 = 0$, was nur die Lösung $x=1$ in $\mathbb{Z}$ hat.
Es sei $z=0$. Wegen $y^2+2y=0$ ist $y \in \{0,-2\}$. Ist $y=-2$, so ist $6x^2+y^2+z^2+6xy+6xz+2yz+2x = 6x^2-10x+4 = 0$, woraus $x=1$ folgt. Ist $y=0$, so folgt $6x^2+2x = 2x(3x+1) = 0$, was $x=0$ zur Folge hat. Damit sind die Lösungen (x,y,z) gegeben durch

$$(0,0,0), \quad (1,-1,-1), \quad (1,-2,0) \quad \text{und} \quad (0,-1,1).$$

Also ist

$$1^* = \{0,\ [1,1]_G - [C_2,1]_G - [C_2,\psi]_G,\ [1,1]_G - 2[C_2,1]_G,\ -[C_2,1]_G + [C_2,\psi]_G\}.$$

Dann ist $U_T(D(G))$ eine elementarabelsche 2-Gruppe der Ordnung $4|C_3^*||1^*| = 32$.

Beispiel 2.6.9 Wir werden zeigen, dass der monomiale Darstellungsring der alternierenden Gruppe $G := A_5$ eine Torsionseinheiten der Ordnung 3 besitzt. Da G nicht-abelsch und einfach ist, zeigt dieses Beispiel insbesondere, dass die Ordnung einer Torsionseinheit von $D(G)$ kein Teiler von $2(G:G')$ sein muss. Wir betrachten die Untergruppen

$$H := \langle (2,3)(4,5), (2,4)(3,5), (3,4,5) \rangle \cong \mathrm{Alt}(4),$$

$$U := \langle (2,5)(3,4), (2,3)(4,5) \rangle = H',\ K := \langle (2,5)(3,4) \rangle \leq U \ \text{und}\ \ V := \langle (3,4,5) \rangle$$

von G. Dann ist $|H| = 12$, $|U| = 4$, $|K| = 2$, $|V| = 3$ und

$$H \not\geq N_G(V) = \langle (3,4,5), (1,2)(4,5) \rangle \cong S_3.$$

Weiterhin ist $N_G(U) = H = N_G(H)$, $N_G(K) = U$, und alle Untergruppen von G der Ordnung 2 sind zu K in G konjugiert. Ferner folgt aus $K \leq {}^gH$ für $g \in G$, dass $g \in H$ ist. Wir wählen $\lambda \in \hat{H}$, $\varphi \in \hat{V}$ und setzen

$$a := 1 - ([H,1]_G - [H,\lambda]_G) + ([V,1]_G - [V,\varphi]_G).$$

Wir zeigen zunächst, dass a eine Torsionseinheit ist, indem wir die einzelnen Spezieswerte von a berechnen. Für alle Untergruppen $W \leq G$, die nicht zu H und V in G subkonjugiert sind, ist

$$s^{D(G)}_{(W,wW')}([H,\lambda]_G) = 0 = s^{D(G)}_{(W,wW')}([V,\varphi]_G)$$

für alle $w \in W$. Gegebenenfalls ist $s^{D(G)}_{(W,wW')}(a) = 1$. Im folgenden berechnen wir die Spezieswerte $s^{D(G)}_{(W,wW')}(a)$ für alle Untergruppen $W \leq G$, die zu H oder V subkonjugiert sind. Es genügt, die Gruppen H, U K, V und 1 zu betrachten. Wegen $N_G(H) = H$ und $V < H$ ist

$$s^{D(G)}_{(H,hH')}([H,\lambda]_G) = \sum_{gH \in N_G(H)/H} {}^g\lambda(h) = \lambda(h) \quad \text{und} \quad s^{D(G)}_{(H,hH')}([V,\varphi]_G) = 0 \tag{2.26}$$

für alle $h \in H$. Es ist genau dann $U \leq {}^gH$ für $g \in G$, wenn $g \in H$ ist. Ferner ist $U \not\leq_G V$. Also gilt

$$s^{D(G)}_{(U,u)}([H,\lambda]_G) = \sum_{\substack{gH \in G/H \\ U \leq {}^gH}} {}^g\lambda(u) = \lambda(u) = 1 \quad \text{und} \quad s^{D(G)}_{(U,u)}([V,\varphi]_G) = 0 \tag{2.27}$$

für alle $u \in U$. Ist $K \leq {}^gH$ für ein $g \in G$, so ist $g \in H$. Ferner ist $K \nleq_G V$, also ist

$$s_{(K,k)}^{D(G)}([H,\lambda]_G) = \sum_{\substack{gH \in G/H \\ K \leq {}^gH}} {}^g\lambda(k) = \lambda(k) = 1 \quad \text{und} \quad s_{(K,k)}^{D(G)}([V,\varphi]_G) = 0 \tag{2.28}$$

für alle $k \in K$. Es sei $\{g_1, ..., g_{(G:H)}\}$ ein vollständiges Repräsentantensystem der Nebenklassen von G nach H. Dabei seien $g_1 = 1$ und $g_2 = (1,2)(4,5) \in N_G(V)$. Dann ist $g_ih \notin N_G(V)$ für alle $i = 3, ..., (G:H)$ und alle $h \in H$. Aus $g_ih \in N_G(V)$ für ein $i \in \{1, ..., (G:H)\}$ und ein $h \in H$ folgt nämlich $g_ih \in H$ oder $g_ih =_{N_G(V)} g_2$. Ist $g_ih \in H$, so ist $i = 1$, und ist $g_ih =_{N_G(V)} g_2$, so folgt unmittelbar $g_2^{-1}g_ih \in H$ und damit $i = 2$. Ist nun $V^{g_i} \leq H$ für ein $i \in \{1, ..., (G:H)\}$, so existiert $h \in H$ mit $V^{g_ih} = V$, da V eine 3-Sylowgruppe von H ist. Also ist $g_ih \in N_G(V)$, und damit ist $i \in \{1, 2\}$. Es folgt

$$s_{(V,v)}^{D(G)}([H,\lambda]_G) = \sum_{\substack{gH \in G/H \\ V \leq {}^gH}} {}^g\lambda(v) = \lambda(v) + {}^{g_2}\lambda(v) = \begin{cases} -1 & \text{falls } v \neq 1,\ \lambda \neq 1 \\ 2 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2.29}$$

und

$$s_{(V,v)}^{D(G)}([V,\varphi]_G) = \sum_{gV \in N_G(V)/V} {}^g\varphi(v) = \begin{cases} -1 & \text{falls } v \neq 1,\ \varphi \neq 1 \\ 2 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2.30}$$

Es seien nun $1 \neq \lambda \in \hat{H}$ und $1 \neq \varphi \in \hat{V}$. Für $h \in H$ folgt aus (2.26)

$$s_{(H,hH')}^{D(G)}(a) = 1 - s_{(H,hH')}^{D(G)}([H,1]_G - [H,\lambda]_G) = 1 - \lambda(1) + \lambda(h) = \lambda(h),$$

und für $u \in U$ erhält man mit (2.27)

$$s_{(U,u)}^{D(G)}(a) = 1 - s_{(U,u)}^{D(G)}([H,1]_G - [H,\lambda]_G) = 1.$$

Für $k \in K$ folgt aus (2.28)

$$s_{(K,k)}^{D(G)}(a) = 1 - s_{(K,k)}^{D(G)}([H,1]_G - [H,\lambda]_G) = 1.$$

Für $v \in V$ folgt aus (2.29) und (2.30)

$$s_{(V,v)}^{D(G)}(a) = 1 - s_{(V,v)}^{D(G)}([H,1]_G - [H,\lambda]_G) + s_{(V,v)}^{D(G)}([V,1]_G - [V,\lambda]_G) = 1.$$

Weiterhin ist

$$e_{(1,1)}^{D(G)}(a) = 1 - ((G:H) - (G:H)) + ((G:V) - (G:V)) = 1.$$

Also ist $a \in U_T(D(G))$. Für $hH' \neq 1$ hat die Einheitswurzel $s_{(H,hH')}^{D(G)}(a) = \lambda(h)$ Ordnung 3, und damit hat a Ordnung 3. Also besitzt $D(G)$ nicht-triviale Torsionseinheiten.

2.7 Abelsche Gruppen

In Satz 2.3.5 haben wir gesehen, dass man die Kommutativität einer Gruppe G im Ring $D(G)$ an den Führern der primitiven Idempotente erkennen kann. Mit Hilfe von Satz 2.6.7 über die Torsionseinheiten von $D(G)$ können wir in diesem Abschnitt zeigen, dass $D(G) \cong D(\tilde{G})$ mit einer abelschen Gruppe G die Isomorphie $G \cong \tilde{G}$ impliziert. Wir werden im folgenden die zyklische Gruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ stets mit C_2 bezeichnen.

Satz 2.7.1 *Es sei G eine abelsche Gruppe. Dann ist*

$$U_T(D(G)) \cong G \times C_2^{m+1},$$

wobei m die Anzahl der Untergruppen von G mit Index 2 ist.

Beweis: Für $G = 1$ ist die Behauptung klar. Es sei $G \neq 1$. Wir benutzen die Bezeichnungen aus Satz 2.6.7 und setzen $S := \{H : H \leq G\}$ und $n := 2|G|$. Dann hat S Eigenschaft $(*)$, und für $H \in S$ gilt $S(H) = \{[H, \psi]_G : \psi \in \hat{H}\}$. Es seien $U < G$ und $a \in U^*$. Dann ist $a + 1$ eine Torsionseinheit in $D(G)$. Es sei ρ die Einbettung von $D(G)$ in den Ghostring $\hat{D}(G)$ (siehe (2.11)). Dann ist $\rho_U(a + 1) \in \mathbb{Z}\hat{U}$ eine Torsionseinheit in $\mathbb{Z}\hat{U}$. Da $\hat{U}$ abelsch ist, ist $\pm\hat{U}$ die Menge aller Torsionseinheiten in $\mathbb{Z}\hat{U}$ (siehe [Hi40]). Also existiert $\tau \in \hat{U}$ mit $\rho_U(a+1) = \pm\tau$. Es ist $a = \sum_{\lambda \in \hat{U}} a_{[U,\lambda]}[U, \lambda]_G$ mit $a_{[U,\lambda]} \in \mathbb{Z}$. Da G abelsch ist, folgt

$$\rho_U(a) = \sum_{\lambda \in \hat{U}} a_{[U,\lambda]} \sum_{gU \in G/U} {}^g\lambda = (G : U) \sum_{\lambda \in \hat{U}} a_{[U,\lambda]}\lambda = \pm\tau - 1.$$

Im Fall $2 < (G : U)$ folgt unmittelbar $a_{[U,\lambda]} = 0$ für alle $\lambda \in \hat{U}$. In diesem Fall ist also $a = 0$. Ist $(G : U) = 2$, so folgt $\rho_U(a) \in \{0, -2\}$. Ist $\rho_U(a) = 0$, so ist $a_{[U,\lambda]} = 0$ für alle $\lambda \in \hat{U}$, und damit ist $a = 0$. Der Fall $\rho_U(a) = -2$ ist nur für $a_{[U,1]} = -1$ und $a_{[U,\lambda]} = 0$ für alle $\lambda \in \hat{U}\backslash\{1\}$ möglich. Ferner ist

$$(1 - [U, 1]_G)^2 = 1 - 2[U, 1]_G + [U, 1]_G^2 = 1 - 2[U, 1]_G + \sum_{gU \in G/U} [U, 1]_G = 1. \tag{2.31}$$

Dann ist $(1 - [U, 1]_G)^{2|G|} = 1$, also ist $-[U, 1]_G \in U^*$. Damit ist $U^* = \{0, -[U, 1]_G\}$, falls $(G : U) = 2$ ist. Es folgt

$$|U^*| = \begin{cases} 2 & \text{falls } (G : U) = 2 \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wegen (2.31) und da sich jede Torsionseinheit $u \in U_T(D(G))$ eindeutig in der Form

$$u = \pm[G, \psi]_G \prod_{H \in S\backslash\{G\}} (1 + u_H)$$

mit $u_H \in H^*$ und $\psi \in \hat{G}$ darstellen lässt, folgt die Behauptung. □

Korollar 2.7.2 *Es seien G eine endliche, abelsche Gruppe, und es sei $\tilde{G}$ eine endliche Gruppe mit $D(G) \cong D(\tilde{G})$. Dann ist $G \cong \tilde{G}$.*

Beweis: Aus Satz 2.3.5 folgt, dass auch $\tilde{G}$ abelsch ist. Wegen $U_T(D(G)) \cong U_T(D(\tilde{G}))$ folgt $G \times C_2^{m+1} \cong \tilde{G} \times C_2^{\tilde{m}+1}$, wobei m und $\tilde{m}$ jeweils die Anzahl der Untergruppen von G und $\tilde{G}$ mit Index 2 sind. Dann ist $|G \times C_2^{m+1}| = |\tilde{G} \times C_2^{\tilde{m}+1}|$, und wegen $|G| = |\tilde{G}|$ folgt $m = \tilde{m}$ und damit $G \cong \tilde{G}$. □

2.8 Nilpotente und p-nilpotente Gruppen

In diesem Abschnitt werden wir zunächst zeigen, dass die monomialen Darstellungsringe der Diedergruppe, der Semidiedergruppe und der verallgemeinerten Quaternionengruppe der Ordnung 2^n nicht isomorph sind. Wir werden dann sehen, dass der Isomorphietyp von Gruppen der Ordnung p^3 durch $D(G)$ eindeutig bestimmt ist. Anschließend werden wir die monomialen Darstellungsringe nilpotenter Gruppen untersuchen. Am Ende dieses Abschnittes wird ein weiteres Ergebnis aufgezeigt, bei dem p-nilpotente Gruppen zugrunde gelegt werden.

Für $3 \leq n \in \mathbb{N}$ ist

$$D_n := \langle x, y \mid x^{2^{n-1}} = 1 = y^2,\ yxy^{-1} = x^{-1} \rangle$$

die *Diedergruppe* und

$$Q_n := \langle x, y \mid x^{2^{n-1}} = 1,\ y^2 = x^{2^{n-2}},\ yxy^{-1} = x^{-1} \rangle$$

die *verallgemeinerte Quaternionengruppe* der Ordnung 2^n. Die verallgemeinerte Quaternionengruppe der Ordnung 8 heißt *Quaternionengruppe*. Für $4 \leq n \in \mathbb{N}$ heißt

$$SD_n := \langle x, y \mid x^{2^{n-1}} = 1 = y^2,\ yxy^{-1} = x^{-1+2^{n-2}} \rangle$$

Semidiedergruppe der Ordnung 2^n. Diese Gruppen werden ausführlich in [Hu], Kapitel I, §14, behandelt. Im folgenden soll gezeigt werden, dass die jeweiligen monomialen Darstellungsringe dieser Gruppen verschiedene Basislängen haben. Es sei $3 \leq n \in \mathbb{N}$. Im Fall $n = 3$ sei $G \in \{D_n, Q_n\}$, und für $4 \leq n$ sei $G \in \{D_n, Q_n, SD_n\}$. Für $i = 1, ..., n-1$ definieren wir Untergruppen von G durch

$$H_{i,1} := \langle x^{2^{n-i-1}} \rangle, \quad H_{i,2} := \langle x^{2^{n-i}}, y \rangle \ \text{ und } \ H_{i,3} := \langle x^{2^{n-i}}, yx \rangle.$$

Diese Untergruppen bilden für $i = 2, ..., n-1$ ein vollständiges Repräsentantensystem der Konjugationsklassen der Untergruppen der Ordnung 2^i. Für $i = 2, ..., n-1$ gilt

$$N_G(H_{i,1}) = G,$$

und für $i = 2, ..., n-2$ ist

$$N_G(H_{i,2}) = H_{i+1,2} \ \text{ und } \ N_G(H_{i,3}) = H_{i+1,3}.$$

Außerdem ist $N_G(H_{n-1,2}) = N_G(H_{n-1,3}) = G$. Für die jeweiligen Kommutatorgruppen gilt

$$G' = H_{n-2,1}, \quad H'_{i,2} = H'_{i,3} = H_{i-2,1}$$

für alle $i = 3, ..., n-1$ und $H'_{i,1} = H'_{2,2} = H'_{2,3} = 1$ für alle $i = 1, ..., n-1$. Weiterhin ist $Z(G) = H_{1,1} = \langle x^{2^{n-2}} \rangle$ das Zentrum von G.
Es sei $i \in \{2, ..., n-1\}$ fest gewählt. Wir werden die Anzahl $A_{i,j}$ der Elemente $[H_{i,j}, hH'_{i,j}]_G \in \mathcal{D}(G)/G$ mit $j \in \{1, 2, 3\}$ berechnen. Wir betrachten zunächst die Untergruppe $H_{i,1}$. Je zwei verschiedene Elemente von $H_{i,1} \backslash Z(G)$ bilden eine Konjugationsklasse in G. Also gibt es genau $A_{i,1} = 2 + (|H_{i,1}| - 2)/2 = 2^{i-1} + 1$ Bahnen $[H_{i,1}, h]_G \in \mathcal{D}(G)/G$.
Wir betrachten nun die Untergruppe $H_{i,2}$. Es ist

$$H_{i,2}/H'_{i,2} = \{1H'_{i,2},\ x^{2^{n-i}}H'_{i,2},\ yH'_{i,2},\ x^{2^{n-i}}yH'_{i,2}\}.$$

Nun ist

$$x^{2^{n-i}}y = x^{2^{n-i-1}}yx^{-2^{n-i-1}},$$

wie man leicht nachrechnet. Also sind die Elemente y und $x^{2^{n-i}}y$ in $N_G(H_{i,2})$ konjugiert. Damit gibt es zur Untergruppe $H_{i,2}$ genau die drei paarweise verschiedenen Bahnen $[H_{i,2}, 1H'_{i,2}]_G$, $[H_{i,2}, x^{2^{n-i}}H'_{i,2}]_G$ und $[H_{i,2}, yH'_{i,2}]_G$. Also ist $A_{i,2} = 3$. Mit analoger Argumentation erhält man zur Untergruppe $H_{i,3}$ die drei paarweise verschiedenen Bahnen $[H_{i,3}, 1H'_{i,3}]_G$, $[H_{i,3}, x^{2^{n-i}}H'_{i,3}]_G$ und $[H_{i,3}, xyH'_{i,3}]_G$ aus $\mathcal{D}(G)/G$. Es folgt $A_{i,3} = 3$.
Wegen $(G : G') = 4$ gibt es genau 4 Elemente $[G, gG']_G \in \mathcal{D}(G)/G$ mit $g \in G$.
In D_n gibt es genau 3 Konjugationsklassen von Untergruppen der Ordnung 2. Repräsentativ für diese Klassen stehen die Gruppen $H_{1,1}$, $H_{1,2}$ und $H_{1,3}$, also ist $A_{1,1} = A_{1,2} = A_{1,3} = 2$. Die Gruppe SD_n besitzt genau 2 Konjugationsklassen von Untergruppen der Ordnung 2. Diese werden von den Gruppen $H_{1,1}$ und $H_{1,2}$ repräsentiert. Es folgt $A_{1,1} = A_{1,2} = 2$. In der Gruppe Q_n gibt es genau eine Untergruppe der Ordnung 2, nämlich die Gruppe $H_{1,1}$. Insbesondere ist $A_{1,1} = 2$. Die jeweiligen Basislängen von D_n, Q_n und SD_n berechnen sich nun wie folgt:

$$\begin{aligned}|\mathcal{D}(D_n)/D_n| &= 1 + (G : G') + \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{n-1} A_{i,j}\\ &= 1 + 4 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2(n-2) + \sum_{i=2}^{n-1}(2^{i-1}+1) = 2^{n-1} + 7n - 5,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\mathcal{D}(SD_n)/SD_n| &= 1 + (G : G') + A_{1,1} + A_{1,2} + \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=2}^{n-1} A_{i,j}\\ &= 1 + 4 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2(n-2) + \sum_{i=2}^{n-1}(2^{i-1}+1) = 2^{n-1} + 7n - 7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\mathcal{D}(Q_n)/Q_n| &= 1 + (G : G') + A_{1,1} + \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=2}^{n-1} A_{i,j} =\\ &= 1 + 4 + 2 + 3 \cdot 2(n-2) + \sum_{i=2}^{n-1}(2^{i-1}+1) = 2^{n-1} + 7n - 9.\end{aligned}$$

Damit sind die Basislängen der jeweiligen monomialen Darstellungsringe verschieden, und die Ringe sind demnach nicht isomorph.

Satz 2.8.1 *Es sei p eine Primzahl. Der Isomorphietyp der Gruppen der Ordnung p^3 ist durch $D(G)$ eindeutig bestimmt.*

Beweis: Nach Satz 2.7.2 genügt es, die Behauptung für nicht-abelsche Gruppen zu beweisen. Der Fall $p = 2$ wurde bereits behandelt. Es sei also $3 \leq p$. Es gibt genau zwei Isomorphietypen nicht-abelscher Gruppen der Ordnung p^3 (siehe [Hu], Kap. I, §14). Eine Klasse wird durch die Gruppe

$$G_1 := (\langle x\rangle \times \langle y\rangle) \rtimes \langle z\rangle$$

beschrieben, wobei $\langle x\rangle$, $\langle y\rangle$ und $\langle z\rangle$ zyklische Gruppen der Ordnung p sind. Dabei operiert $\langle z\rangle$ durch $zxz^{-1} = xy$ und $zyz^{-1} = y$ auf $\langle x\rangle \times \langle y\rangle$. Der zweite Isomorphietyp wird durch die Gruppe

$$G_2 := \langle v\rangle \rtimes \langle w\rangle$$

repräsentiert, wobei $\langle v\rangle$ und $\langle w\rangle$ zyklische Gruppen mit $|\langle v\rangle| = p^2$ und $|\langle w\rangle| = p$ sind. Dabei operiert $\langle w\rangle$ durch $wvw^{-1} = v^{1+p}$ auf $\langle v\rangle$. Wir werden im folgenden die Basislängen von $D(G_1)$ und $D(G_2)$ berechnen. Dabei zählen wir zuerst die primitiven Idempotente $e^{D(G_1)}_{(H,hH')}$ von $D_{\mathbb{Q}(\zeta)}(G_1)$, wobei H normal in G_1 ist. Dann werden wir die Anzahl der restlichen primitiven Idempotente berechnen und hinzuaddieren. Bei $D(G_2)$ werden wir analog vorgehen.
Die Gruppe G_1 besitzt genau $p + 4$ Normalteiler, nämlich die Gruppen

$$1,\ \langle y\rangle,\ \langle z, y\rangle,\ \langle zx, y\rangle,\ \langle zx^2, y\rangle, ..., \langle zx^{p-1}, y\rangle,\ \langle x, y\rangle \text{ und } G.$$

Dabei ist $\langle y\rangle = Z(G_1) = G_1'$ der einzige Normalteiler der Ordnung p von G_1. Die Operation von G auf $\mathcal{D}(G)$ erzeugt für einen Normalteiler $N < G$ und $g \in N$ mit $g \notin \langle y\rangle$ eine Bahn $[N, g]_G$ der Länge p. Es gibt genau $p+1$ echte Normalteiler, die $\langle y\rangle$ echt enthalten, und diese enthalten genau $p^2 - p$ Elemente, die nicht in $\langle y\rangle$ liegen. Also gibt es

$$(p + 1)(p^2 - p)/p = (p + 1)(p - 1)$$

primitive Idempotente der Form $e^{D(G_1)}_{(N,g)}$ mit $N \trianglelefteq G_1$, $N \neq G_1$ und $g \notin \langle y\rangle$, und es gibt $(p + 2)p$ primitive Idempotente $e^{D(G_1)}_{(N,g)}$, $1 < N \trianglelefteq G_1$ mit $N \neq G_1$ und $g \in \langle y\rangle$. Weiterhin gibt es $(G_1 : G_1') = p^2$ primitive Idempotente $e^{D(G_1)}_{(G_1,gG_1')}$, $g \in G_1$.
Da jedes Element $1 \neq g \in G_1$ die Ordnung p hat, ist jedes Element $1 \neq g \in G_1$ in genau einer Untergruppe der Ordnung p enthalten. Also gibt es

$$(p^3 - 1)/(p - 1) = p^2 + p + 1$$

Untergruppen der Ordnung p. Es gibt genau eine normale Untergruppe der Ordnung p, und es sind jeweils p nicht-normale Untergruppen von G_1 zueinander konjugiert. Also gibt es $(p^2 + p)/p = p + 1$ Konjugationsklassen nicht-normaler Untergruppen von G_1. Ist H eine nicht-normale Untergruppe von G_1, so sind je zwei verschiedene Elemente von H nicht in G_1 konjugiert. Die Bahnen $[H, h_1]_{G_1}$ und $[H, h_2]_{G_1}$ sind also für $h_1, h_2 \in H$ mit $h_1 \neq h_2$ verschieden. Also gibt es genau $p(p + 1)$ primitive Idempotente $e^{D(G_1)}_{(H,h)}$ mit nicht-normaler Untergruppe $H \leq G$. Die Basis von $D(G_1)$ hat also die Länge

$$|\mathcal{D}(G_1)/G_1| = 1 + p(p + 1) + p(p + 2) + p^2 + (p + 1)(p - 1) = p(4p + 3).$$

Die Gruppe G_2 besitzt ebenfalls $p + 4$ Normalteiler, nämlich die Gruppen

$$1,\ \langle v\rangle,\ \langle v^p\rangle,\ \langle w, v^p\rangle,\ \langle wv\rangle,\ ..., \langle wv^{p-1}\rangle \text{ und } G_2.$$

Ferner ist $\langle v^p\rangle = Z(G_2) = G_2'$. Mit der gleichen Begründung wie bei Gruppe G_1 gibt es $(p+1)(p-1)$ primitive Idempotente der Form $e^{D(G_2)}_{(N,g)}$ mit $N \trianglelefteq G_2, N \neq G_2$ und $g \notin \langle v^p\rangle$, und $(p+2)p$ primitive Idempotente $e^{D(G_2)}_{(N,g)}$ mit $1 < N \trianglelefteq G_2$, $N \neq G_2$ und $g \in \langle v^p\rangle$. Außerdem gibt es p^2 primitive Idempotente $e^{D(G_2)}_{(G_2,g)}$, $g \in G$. Nun sind die Untergruppen $\langle v\rangle, \langle wv\rangle, ..., \langle wv^{p-1}\rangle$

genau die zyklischen Untergruppen der Ordnung p^2 von G_2, und jede dieser Gruppen enthält genau $p(p-1)$ erzeugende Elemente. Also gibt es $p^2(p-1)$ Elemente der Ordnung p^2 in G_2, und damit gibt es

$$p^3 - 1 - p^2(p-1) = p^2 - 1$$

Elemente der Ordnung p in G_2. Da $\langle v^p \rangle$ die einzige normale Untergruppe der Ordnung p ist, gibt es genau

$$(p^2 - 1 - (p-1))/(p-1) = (p^2 - p)/(p-1) = p$$

nicht-normale Untergruppen der Ordnung p in G_2. Damit besitzt G_2 genau eine Konjugationsklasse von Untergruppen der Ordnung p. Nun sind die Bahnen $[H, h_1]_{G_2}$ und $[H, h_2]_{G_2}$ für eine nicht-normale Untergruppe $H \leq G_2$ und $h_1, h_2 \in H$ mit $h_1 \neq h_2$ verschieden. Es gibt also p primitive Idempotente $e^{D(G_2)}_{(H,h)}$ mit nicht-normaler Untergruppe H und $h \in H$. Es folgt

$$|\mathcal{D}(G_2)/G_2| = 1 + p + p(p+2) + p^2 + (p+1)(p-1) = 3p(p+1),$$

und damit ist $D(G_1) \ncong D(G_2)$. □

Im weiteren Verlauf dieses Abschnittes werden wir nilpotente Gruppen untersuchen. Der folgende Satz zeigt, dass man die Nilpotenz einer Gruppe G in $D(G)$ erkennen kann.

Satz 2.8.2 *Es sei G eine endliche, nilpotente Gruppe und $\tilde{G}$ eine endliche Gruppe mit $D(G) \cong D(\tilde{G})$. Dann ist $\tilde{G}$ nilpotent.*

Beweis: Es sei $\alpha : D(\tilde{G}) \to D(G)$ ein Isomorphismus, und es sei

$$\alpha(e^{D(\tilde{G})}_{(1,1)}) = e^{D(G)}_{(U,uU')}.$$

Dann ist U ein abelscher Normalteiler von G und $u \in Z(G)$. Es sei p ein Primteiler von G, P die p-Sylowgruppe von G und $H := O^p(U)$. Dann ist H ein abelscher Normalteiler von G mit $p \nmid |H|$. Da $u \in Z(G)$ ist, ist $h := u_{p'} \in Z(G) \cap H$. Aus Satz 2.4.1 und aus der Nilpotenz von G folgt nun

$$\alpha(e^{D(\tilde{G}),p}_{(1,1)}) = \sum_{[K,kK']_G \in I} e^{D(G)}_{(K,kK')} \tag{2.32}$$

mit

$$I = \{[K, kK']_G \in \mathcal{D}(G)/G : K = H \times V,\ V \leq P,\ k = hv,\ v \in V\}.$$

Es seien $K := H \times V$ mit $V \leq P$ und $k := hv$ mit $v \in V$. Da G nilpotent ist, ist $G_{p'} \leq C_G(V)$, und da H normal in G ist, ist $G_{p'} \leq N_G(K)$. Da $h \in Z(G)$ ist, ist

$$gkK'g^{-1} = ghvg^{-1}K' = hvK' = kK'$$

für alle $g \in G_{p'}$. Also ist $G_{p'} \leq N_G(K, kK')$. Weiterhin ist $K' = (H \times V)' = V'$ eine p-Untergruppe von G. Also ist $|G_{p'}|$ ein Teiler von $(N_G(K, kK') : K')$. Damit ist $|G_{p'}|$ ein Teiler aller Führer der primitiven Idempotente $e^{D(G)}_{(K,kK')}$ mit $[K, kK']_G \in I$. Es sei $\tilde{P}$ eine p-Sylowgruppe von $\tilde{G}$. Wegen Gleichung (2.32) und

$$e^{D(\tilde{G}),p}_{(1,1)} = \sum_{\substack{[\tilde{U},\tilde{u}\tilde{U}'] \in \mathcal{D}(\tilde{G})/\tilde{G} \\ \tilde{U} \leq \tilde{P}}} e^{D(\tilde{G})}_{(\tilde{U},\tilde{u}\tilde{U}')}$$

ist $|G_{p'}| = |\tilde{G}|_{p'}$ ein Teiler der Führer der primitiven Idempotente $e^{D(\tilde{G})}_{(\tilde{U},\tilde{u}\tilde{U}')}$ mit $\tilde{U} \leq \tilde{P}$. Insbesondere ist $|\tilde{G}|_{p'}$ ein Teiler des Führers von $e^{D(\tilde{G})}_{(\tilde{P},1\tilde{P}')}$. Also ist $|\tilde{G}|_{p'}$ ein Teiler von

$$(N_{\tilde{G}}(\tilde{P}) : \tilde{P}')_{p'} = (N_{\tilde{G}}(\tilde{P}) : \tilde{P}),$$

und damit ist $\tilde{P}$ normal in $\tilde{G}$. Da p beliebig gewählt wurde, sind alle Sylowgruppen von $\tilde{G}$ normal in $\tilde{G}$. Also ist $\tilde{G}$ nilpotent. □

Wir werden nun zeigen, dass $D(G) \cong D(\tilde{G})$ mit nilpotenten Gruppen G und $\tilde{G}$ die Isomorphie $D(P) \cong D(\tilde{P})$ impliziert, wobei P und $\tilde{P}$ die p-Sylowgruppen von G und $\tilde{G}$ zu einem gegebenen Primteiler p von $|G|$ sind. Wir benötigen zunächst den folgenden Satz.

Satz 2.8.3 *Es seien G und H endliche Gruppen mit* $\mathrm{ggT}(|G|,|H|) = 1$*. Dann ist*

$$D(G \times H) \cong D(G) \otimes_{\mathbb{Z}} D(H).$$

Beweis: Satz 2.2.4 in [Fo04]. □

Satz 2.8.4 *Es seien A_1, A_2, B_1, B_2 kommutative Ringe mit Einselement, die als $\mathbb{Z}$-Modul endlich erzeugt und frei sind. Ferner besitzen die Ringe A_1 und A_2 $\mathbb{Z}$-Basen, die die jeweiligen Einselemente enthalten. Es existiere ein unitärer Teilring $R \subseteq \mathbb{C}$, so dass $R \otimes_{\mathbb{Z}} A_i$ $(i = 1, 2)$ nur die Idempotente 0 und 1 besitzt und $R \otimes_{\mathbb{Z}} B_i$ $(i = 1, 2)$ halbeinfach ist. Ist $A_1 \otimes_{\mathbb{Z}} B_1 \cong A_2 \otimes_{\mathbb{Z}} B_2$, so ist $B_1 \cong B_2$.*

Beweis: Es seien $\{a_1, ..., a_s\} \subseteq A_1$, , $\{\tilde{a}_1, ..., \tilde{a}_t\} \subseteq A_2$, $\{b_1, ..., b_n\} \subseteq B_1$ und $\{\tilde{b}_1, ..., \tilde{b}_m\} \subseteq B_2$ jeweilige $\mathbb{Z}$-Basen mit $a_1 = 1_{A_1}$ und $\tilde{a}_1 = 1_{A_2}$. Dann ist $\{a_i \otimes b_j : i = 1, ..., s,\ j = 1, ..., n\}$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $A_1 \otimes_{\mathbb{Z}} B_1$ und $\{\tilde{a}_i \otimes \tilde{b}_j : i = 1, ..., t,\ j = 1, ..., m\}$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $A_2 \otimes_{\mathbb{Z}} B_2$. Es seien

$$\begin{aligned} \varphi : B_1 &\to R \otimes_{\mathbb{Z}} B_1 \\ b_i &\mapsto 1_R \otimes b_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta : B_1 &\to A_1 \otimes_{\mathbb{Z}} B_1 \\ b_i &\mapsto 1_{A_1} \otimes b_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi := 1 \otimes \delta : R \otimes_{\mathbb{Z}} B_1 &\to R \otimes_{\mathbb{Z}} A_1 \otimes_{\mathbb{Z}} B_1 \\ 1_R \otimes b_i &\mapsto 1_R \otimes 1_{A_1} \otimes b_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu : A_1 \otimes_{\mathbb{Z}} B_1 &\to R \otimes_{\mathbb{Z}} A_1 \otimes_{\mathbb{Z}} B_1 \\ a_j \otimes b_i &\mapsto 1_R \otimes a_j \otimes b_i \end{aligned}$$

$(i = 1, ..., n,\ j = 1, ..., s)$ die jeweiligen kanonischen Einbettungen. Dann ist $\psi \circ \varphi = \mu \circ \delta$. Analog definieren wir die kanonischen Einbettungen $\tilde{\varphi} : B_2 \to R \otimes_{\mathbb{Z}} B_2$, $\tilde{\delta} : B_2 \to A_2 \otimes_{\mathbb{Z}} B_2$, $\tilde{\psi} : R \otimes_{\mathbb{Z}} B_2 \to R \otimes_{\mathbb{Z}} A_2 \otimes_{\mathbb{Z}} B_2$ und $\tilde{\mu} : A_2 \otimes_{\mathbb{Z}} B_2 \to R \otimes_{\mathbb{Z}} A_2 \otimes_{\mathbb{Z}} B_2$. Es sei

$$\alpha : A_1 \otimes_{\mathbb{Z}} B_1 \to A_2 \otimes_{\mathbb{Z}} B_2.$$

ein Isomorphismus. Wir setzen α linear fort zu einem Isomorphismus

$$\hat{\alpha} : R \otimes_{\mathbb{Z}} A_1 \otimes_{\mathbb{Z}} B_1 \quad \to \quad R \otimes_{\mathbb{Z}} A_2 \otimes_{\mathbb{Z}} B_2.$$

Dann ist $\hat{\alpha} \circ \mu = \tilde{\mu} \circ \alpha$.
Es seien $e_1, ..., e_n$ die primitiven Idempotente von $R \otimes_{\mathbb{Z}} B_1$ und $\tilde{e}_1, ..., \tilde{e}_m$ die primitiven Idempotente von $R \otimes_{\mathbb{Z}} B_2$. Dann ist

$$R \otimes_{\mathbb{Z}} B_1 = \bigoplus_{i=1}^{n} Re_i \quad \text{und} \quad R \otimes_{\mathbb{Z}} B_2 = \bigoplus_{i=1}^{m} R\tilde{e}_i.$$

Ferner sind 0 und 1 die einzigen Idempotente in $R \otimes_{\mathbb{Z}} A_1$ und $R \otimes_{\mathbb{Z}} A_2$. Dann sind $1_{R \otimes_{\mathbb{Z}} A_1} \otimes e_i$, $i = 1, ..., n$, die primitiven Idempotente von $(R \otimes_{\mathbb{Z}} A_1) \otimes_R (R \otimes_{\mathbb{Z}} B_1)$, und wegen $R \otimes_{\mathbb{Z}} A_1 \otimes_{\mathbb{Z}} B_1 \cong (R \otimes_{\mathbb{Z}} A_1) \otimes_R (R \otimes_{\mathbb{Z}} B_1)$ sind $\psi(e_i)$, $i = 1, ..., n$, die primitiven Idempotente von $R \otimes_{\mathbb{Z}} A_1 \otimes_{\mathbb{Z}} B_1$. Analog sind $\tilde{\psi}(\tilde{e}_i)$, $i = 1, ..., m$, die primitiven Idempotente von $R \otimes_{\mathbb{Z}} A_2 \otimes_{\mathbb{Z}} B_2$. Also ist $\hat{\alpha}(\{\psi(e_1), ..., \psi(e_n)\}) = \{\tilde{\psi}(\tilde{e}_1), ..., \tilde{\psi}(\tilde{e}_m)\}$. Insbesondere ist $n = m$. Mit einer geeigneten Umnumerierung der $\tilde{e}_i$ können wir $\hat{\alpha}(\psi(e_i)) = \tilde{\psi}(\tilde{e}_i)$ für $i = 1, ..., n$ annehmen. Es sei nun $c \in B_1$. Dann existieren $r_1, ..., r_n \in R$ mit $\varphi(c) = \sum_{i=1}^{n} r_i e_i$, und es gilt

$$(\hat{\alpha} \circ \psi \circ \varphi)(c) = (\hat{\alpha} \circ \psi)(\sum_{i=1}^{n} r_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} r_i \tilde{\psi}(\tilde{e}_i).$$

Damit existieren also $t_1, ..., t_n \in R$ mit $(\hat{\alpha} \circ \psi \circ \varphi)(c) = \sum_{i=1}^{n} t_i (1_R \otimes 1_{A_2} \otimes \tilde{b}_i)$. Nun ist

$$(\hat{\alpha} \circ \psi \circ \varphi)(c) = (\hat{\alpha} \circ \mu \circ \delta)(c) = (\tilde{\mu} \circ \alpha \circ \delta)(c),$$

und es existieren $z_{i,j} \in \mathbb{Z}$ $(i = 1, ..., t, j = 1, ..., n)$ mit

$$(\alpha \circ \delta)(c) = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{n} z_{i,j} (\tilde{a}_i \otimes \tilde{b}_j).$$

Also ist

$$\sum_{i=1}^{n} t_i (1_R \otimes 1_{A_2} \otimes \tilde{b}_i) = (\tilde{\mu} \circ \alpha \circ \delta)(c) = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{n} z_{i,j} (1_R \otimes \tilde{a}_i \otimes \tilde{b}_j).$$

Wegen $\tilde{a}_1 = 1_{A_2}$ ist $\{1_R \otimes 1_{A_2} \otimes \tilde{b}_j : j = 1, ..., n\}$ eine Teilmenge der kanonischen Basis $\{1_R \otimes \tilde{a}_i \otimes \tilde{b}_j : i = 1, ..., t, \; j = 1, ..., n\}$ von $R \otimes_{\mathbb{Z}} A_2 \otimes_{\mathbb{Z}} B_2$. Also ist $t_j = z_{1,j} \in \mathbb{Z}$ für alle $j = 1, ..., n$ und $z_{i,j} = 0$ für $i \neq 1$, $j = 1, ..., n$. Es folgt $(\hat{\alpha} \circ \psi \circ \varphi)(c) \in (\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi})(B_2)$, und damit ist

$$\beta := \tilde{\varphi}^{-1} \circ \tilde{\psi}^{-1} \circ \hat{\alpha} \circ \psi \circ \varphi : B_1 \to B_2$$

ein Ringmonomorphismus. Beachtet man, dass $\psi \circ \varphi = \mu \circ \delta$ und $\tilde{\delta}^{-1} \circ \tilde{\mu}^{-1} = \tilde{\varphi}^{-1} \circ \tilde{\psi}^{-1}$ ist, so folgt

$$\beta = \tilde{\delta}^{-1} \circ \alpha \circ \delta. \tag{2.33}$$

Mit der gleichen Argumentation erhält man den Ringmonomorphismus

$$\tilde{\beta} = \delta^{-1} \circ \alpha^{-1} \circ \tilde{\delta} : B_2 \to B_1,$$

und es gilt $\beta \circ \tilde{\beta} = \mathrm{id}_{B_2}$ und $\tilde{\beta} \circ \beta = \mathrm{id}_{B_1}$. Also ist β ein Isomorphismus. □

Satz 2.8.5 *Es sei p eine Primzahl, und es seien $G = P \times H$ und $\tilde{G} = \tilde{P} \times \tilde{H}$ endliche Gruppen mit p-Gruppen $P, \tilde{P}$ und p'-Gruppen $H, \tilde{H}$. Ist $D(G) \cong D(\tilde{G})$, so ist $D(H) \cong D(\tilde{H})$.*

Beweis: Es seien $\xi \in \mathbb{C}$ eine primitive $|H|$-te Einheitswurzel, $\mathfrak{p}$ ein Primideal in $\mathbb{Z}[\xi]$ mit $\mathrm{char}(\mathbb{Z}[\xi]/\mathfrak{p}) = p$ und $R := \mathbb{Z}[\xi]_{\mathfrak{p}}$ die Lokalisierung von $\mathbb{Z}[\xi]$ bei $\mathfrak{p}$. Nach Satz 2.2.7 haben $D_R(H)$ und $D_{\mathbb{Q}(\xi)}(H)$ die gleichen primitiven Idempotente. Die primitiven Idempotente von $D_R(\tilde{H})$ und $D_{\mathbb{Q}(\xi)}(\tilde{H})$ stimmen ebenfalls überein. Also sind $D_R(H)$ und $D_R(\tilde{H})$ halbeinfach. Aus Satz 2.2.7 folgt außerdem, dass 0 und 1 die einzigen primitiven Idempotente in $D_R(P)$ und $D_R(\tilde{P})$ sind. Aus Satz 2.8.3 erhält man die Isomorphie

$$D(P) \otimes_{\mathbb{Z}} D(H) \cong D(G) \cong D(\tilde{G}) \cong D(\tilde{P}) \otimes_{\mathbb{Z}} D(\tilde{H}).$$

Wir setzen $A_1 := D(P)$, $A_2 := D(\tilde{P})$, $B_1 := D(H)$ und $B_2 := D(\tilde{H})$. Dann sind alle Voraussetzungen aus Satz 2.8.4 erfüllt, und es folgt $D(H) \cong D(\tilde{H})$. □

Korollar 2.8.6 *Es seien G und $\tilde{G}$ endliche, nilpotente Gruppen mit $D(G) \cong D(\tilde{G})$. Es seien $p_1, ..., p_n$ die verschiedenen Primteiler von $|G|$, und für $i = 1, ..., n$ seien G_i und $\tilde{G}_i$ die p_i-Sylowgruppen von G und $\tilde{G}$. Ist*

$$\alpha : D(G_1) \otimes_{\mathbb{Z}} ... \otimes_{\mathbb{Z}} D(G_n) \to D(\tilde{G}_1) \otimes_{\mathbb{Z}} ... \otimes_{\mathbb{Z}} D(\tilde{G}_n)$$

ein Isomorphismus, so existieren für $i = 1, ..., n$ Isomorphismen $\alpha_i : D(G_i) \to D(\tilde{G}_i)$ mit $\alpha = \alpha_1 \otimes ... \otimes \alpha_n$.

Beweis: Für $i = 1, ..., n$ setzen wir $H_i := G_i \times ... \times G_n$ und $\tilde{H}_i := \tilde{G}_i \times ... \times \tilde{G}_n$. Es seien $\delta_i : D(H_i) \to D(H_{i-1})$ und $\tilde{\delta}_i : D(\tilde{H}_i) \to D(\tilde{H}_{i-1})$ für $i = 2, ..., n$ die kanonischen Einbettungen. Nach Anwendung von Satz 2.8.5 unter Berücksichtigung von Gleichung (2.33) erhält man zunächst den Isomorphismus $\beta_2 := \tilde{\delta}_2^{-1} \circ \alpha \circ \delta_2 : D(H_2) \to D(\tilde{H}_2)$. Erneute Anwendung von Satz 2.8.5 liefert den Isomorphismus $\beta_3 := \tilde{\delta}_3^{-1} \circ \beta_2 \circ \delta_3 : D(H_3) \to D(\tilde{H}_3)$. Fährt man auf diese Weise fort, so erhält man den Isomorphismus

$$\beta_n := \tilde{\delta}_n^{-1} \circ ... \circ \tilde{\delta}_2^{-1} \circ \alpha \circ \delta_2 \circ ... \circ \delta_n : D(G_n) \to D(\tilde{G}_n).$$

Dabei sind $\delta_2 \circ ... \circ \delta_n : D(G_n) \to D(G)$ und $\tilde{\delta}_2 \circ ... \circ \tilde{\delta}_n : D(\tilde{G}_n) \to D(\tilde{G})$ die kanonischen Einbettungen. Da die Reihenfolge der Primzahlen beliebig gewählt war, erhält man auf diese Weise Isomorphismen $D(G_i) \to D(\tilde{G}_i)$ für alle $i = 1, ..., n$. Sind also $\tau_i : D(G_i) \to D(G)$ und $\tilde{\tau}_i : D(\tilde{G}_i) \to D(\tilde{G})$ für $i = 1, ..., n$ die kanonischen Einbettungen, so ist

$$\alpha_i := \tilde{\tau}_i^{-1} \circ \alpha \circ \tau_i : D(G_i) \to D(\tilde{G}_i)$$

für alle $i = 1, ..., n$ ein Isomorphismus. Es sei nun $x = x_1 \otimes ... \otimes x_n \in D(G_1) \otimes_{\mathbb{Z}} ... \otimes_{\mathbb{Z}} D(G_n)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \alpha((x_1 \otimes 1_{D(G_2)} \otimes ... \otimes 1_{D(G_n)}) \cdot ... \cdot (1_{D(G_1)} \otimes ... \otimes 1_{D(G_{n-1})} \otimes x_n)) \\ &= (\alpha \circ \tau_1)(x_1) \cdot ... \cdot (\alpha \circ \tau_n)(x_n) = (\tilde{\tau}_1 \circ \alpha_1)(x_1) \cdot ... \cdot (\tilde{\tau}_n \circ \alpha_n)(x_n) \\ &= \alpha_1(x_1) \otimes ... \otimes \alpha_n(x_n). \end{aligned}$$

Also ist $\alpha = \alpha_1 \otimes ... \otimes \alpha_n$. □

Satz 2.8.7 *Es sei G eine nilpotente Gruppe ungerader Ordnung. Dann gilt $U_T(D(G)) \cong \hat{G} \times C_2$.*

Beweis: Angenommen, es ist $U_T(D(G)) \ncong \hat{G} \times C_2$. Nach Satz 2.6.7 existiert ein

$$0 \neq u = \sum_{[H,\varphi]_G \in \mathcal{M}(G)/G} z_{[H,\varphi]}[H,\varphi]_G \in D(G), \quad z_{[H,\varphi]} \in \mathbb{Z},$$

mit $\sum_{k=1}^{2|G|} \binom{2|G|}{k} u^k = 0$ und $z_{[G,\varphi]} = 0$ für alle $\varphi \in \hat{G}$. Also ist $1 + u \in U_T(D(G))$. Es sei $U \leq G$ so gewählt, dass $|U|$ maximal ist mit der Eigenschaft $z_{[U,\psi]} \neq 0$ für ein $\psi \in \hat{U}$. Dann ist $U < G$. Da $\pm\hat{U}$ die Menge der Torsionseinheiten in $\mathbb{Z}\hat{U}$ ist, existiert ein $\tau \in \hat{U}$ mit

$$\rho_U(u) = \sum_{[U,\varphi]_G \in \mathcal{M}(G)/G} z_{[U,\varphi]} \sum_{gU \in N_G(U)/U} {}^g\varphi = \pm\tau - 1.$$

Dabei ist ρ die Einbettung von $D(G)$ in den Ghostring $\hat{D}(G)$ (siehe (2.11)) und ρ_U die entsprechende Projektion. Ist $\tau \neq 1$, so ist $z_{[U,1]} = -1$ und $(N_G(U) : U) = 1$. Aus der Nilpotenz von G folgt aber $(N_G(U) : U) \neq 1$. Also ist $\tau = 1$. Der Fall $\rho_U(u) = -2$ ist wegen $(N_G(U) : U) \neq 1$ und $(N_G(U) : U) \not\equiv 0 \pmod 2$ nicht möglich. Also ist $\rho_U(u) = 0$. Dies impliziert aber $z_{[U,\varphi]} = 0$ für alle $\varphi \in \hat{U}$, was der Voraussetzung $z_{[U,\psi]} \neq 0$ widerspricht. Also ist $U_T(D(G)) \cong \hat{G} \times C_2$. □

Als unmittelbare Konsequenz erhält man das folgende Korollar.

Korollar 2.8.8 *Es seien G und $\tilde{G}$ nilpotente Gruppen mit $D(G) \cong D(\tilde{G})$. Dann sind die $2'$-Hallgruppen von G/G' und $\tilde{G}/\tilde{G}'$ isomorph.*

Beweis: Es seien H und $\tilde{H}$ die $2'$-Hallgruppen von G und $\tilde{G}$. Nach Satz 2.8.5 ist $D(H) \cong D(\tilde{H})$. Nach Satz 2.8.7 ist $H/H' \times C_2 \cong \tilde{H}/\tilde{H}' \times C_2$, woraus die Behauptung folgt. □

Für p-nilpotente Gruppen kann das folgende Ergebnis formuliert werden.

Satz 2.8.9 *Es seien G und $\tilde{G}$ endliche Gruppen mit $D(G) \cong D(\tilde{G})$. Für einen Primteiler p von $|G|$ seien die p-Sylowgruppen von G und $\tilde{G}$ zyklisch. Ist G p-nilpotent, so ist auch $\tilde{G}$ p-nilpotent.*

Beweis: Es sei P eine p-Sylowgruppe von G. Es sei $\alpha : D(\tilde{G}) \to D(G)$ ein Isomorphismus. Dann ist $\alpha(e^{D(\tilde{G})}_{(1,1)}) = e^{D(G)}_{(U,u)}$ mit einem abelschen Normalteiler $U \trianglelefteq G$ und $u \in Z(G)$. Es seien $H := O^p(U)$ und $h := u_{p'} \in Z(G)$. Nach Satz 2.4.1 ist

$$\alpha(e^{D(\tilde{G}),p}_{(1,1)}) = \sum_{[K,kK'] \in I} e^{D(G)}_{(K,kK')} \tag{2.34}$$

mit $I = \{[K, kK']_G \in \mathcal{D}(G)/G : K = HV,\ V \leq P,\ k = hv,\ v \in V\}$. Es seien $V \leq P$, $v, w \in V$ und $K := HV$. Angenommen, es ist $[K, hvK']_G = [K, hwK']_G$. Wir zeigen $v = w$.
Es existiert also $gK' \in N_G(K)/K'$ mit ${}^g(hv)K' = hwK'$. Wegen $h \in Z(G)$ folgt ${}^gvK' = wK'$. Da P zyklisch ist, ist $K/H \cong V$ zyklisch, also ist $K' \leq H$ und $VK'/K' \cong V$. Insbesondere ist VK'/K' eine zyklische p-Untergruppe von $N_G(K)/K'$. Nun sind $vK', wK' \in VK'/K'$, und wegen $|\langle wK' \rangle| = |\langle {}^gvK' \rangle| = |\langle vK' \rangle|$ ist $\langle wK' \rangle = \langle vK' \rangle =: T$. Damit ist $gK' \in N_{N_G(K)/K'}(T)$.

Da G p-nilpotent ist, ist auch $N_G(K)$ p-nilpotent, und damit ist auch $N_G(K)/K'$ p-nilpotent. Aus dem p-Nilpotenz-Kriterium von Frobenius folgt, dass $N_{N_G(K)/K'}(T)/C_{N_G(K)/K'}(T)$ eine p-Gruppe ist. Da P abelsch ist, ist jede p-Sylowgruppe von $N_G(K)/K'$ abelsch. Damit ist eine p-Sylowgruppe von $N_G(K)/K'$ in $C_{N_G(K)/K'}(T)$ enthalten. Also ist $|N_G(K)/K'|_p$ ein Teiler von $|C_{N_G(K)/K'}(T)|$. Es folgt $N_{N_G(K)/K'}(T) = C_{N_G(K)/K'}(T)$, und damit ist $wK' = vK'$. Es folgt $v^{-1}w \in K' \cap V = 1$, also ist $v = w$.
Es sei $|P| = p^n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Zu jedem Teiler p^m, $m \in \mathbb{N}$, von $|P|$ gibt es genau eine Untergruppe $V \leq P$ mit $|V| = p^m$. Nach den obigen Ausführungen gibt es zu jeder Untergruppe $V \leq P$ mit $|V| = p^m$ genau p^m verschiedene Bahnen $[HV, hv(HV)']_G$, $v \in V$. Also ist

$$|I| = \sum_{i=0}^{n} p^i = \frac{p^{n+1}-1}{p-1}.$$

Es sei $\tilde{P}$ eine p-Sylowgruppe von $\tilde{G}$. Da $\tilde{P}$ zyklisch ist, ist nach Satz 2.2.7

$$e_{(1,1)}^{D(\tilde{G}),p} = \sum_{[\tilde{K},\tilde{k}\tilde{K}']_{\tilde{G}} \in J} e_{(\tilde{K},\tilde{k}\tilde{K}')}^{D(\tilde{G})}$$

mit $J = \{[\tilde{V}, \tilde{v}]_{\tilde{G}} \in \mathcal{D}(\tilde{G})/\tilde{G} : \tilde{V} \leq \tilde{P},\ \tilde{v} \in \tilde{V}\}$. Da $\tilde{P}$ ebenfalls Ordnung p^n hat, ist $|J| \leq \sum_{i=0}^{n} p^i$. Wegen Gleichung (2.34) ist $|I| = |J|$, also ist genau dann $[\tilde{V}, \tilde{v}]_{\tilde{G}} = [\tilde{W}, \tilde{w}]_{\tilde{G}}$ mit $\tilde{V}, \tilde{W} \leq \tilde{P}$, $\tilde{v} \in \tilde{V}$, $\tilde{w} \in \tilde{W}$, wenn $\tilde{V} = \tilde{W}$ und $\tilde{v} = \tilde{w}$ ist. Damit ist $N_{\tilde{G}}(\tilde{V}) = C_{\tilde{G}}(\tilde{V})$ für alle $\tilde{V} \leq \tilde{P}$. Insbesondere ist $N_{\tilde{G}}(\tilde{P}) = C_{\tilde{G}}(\tilde{P})$, und nach dem p-Nilpotenz-Kriterium von Burnside ist $\tilde{G}$ p-nilpotent. □

2.9 Z-Gruppen

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, dass die Isomorphie $D(G) \cong D(\tilde{G})$ mit Gruppen G und $\tilde{G}$, deren Sylowgruppen zyklisch sind, eine hinreichende Bedingung für die Isomorphie $G \cong \tilde{G}$ ist. Dies unterscheidet sich von der entsprechenden Situation beim Burnsidering, bei der die Voraussetzung $B(G) \cong B(\tilde{G})$ im allgemeinen nicht die Isomorphie der beiden Gruppen impliziert. Wir werden dies an einem Beispiel erläutern.

Eine endliche Gruppe G heißt *Z-Gruppe*, wenn alle Sylowgruppen von G zyklisch sind. Beispielsweise sind Gruppen mit quadratfreier Ordnung Z-Gruppen. Der folgende Satz gibt Auskunft über die Struktur von Z-Gruppen.

Satz 2.9.1 (Zassenhaus) *Es sei G eine Z-Gruppe. Dann existieren $n, m, r \in \mathbb{N}$ mit*

$$G = \langle x, y : x^m = 1 = y^n,\ yxy^{-1} = x^r \rangle,$$

wobei $|G| = nm$, $r^n \equiv 1 \pmod{m}$ und $\mathrm{ggT}((r-1)n, m) = 1$ ist. Umgekehrt hat jede Gruppe mit den angegebenen Relationen lauter zyklische Sylowgruppen.

Beweis: [Hu], Kap. IV, Satz 2.11. □

Bemerkung 2.9.2 Es sei G eine Z-Gruppe. Satz 2.9.1 besagt, dass $x, y \in G$ existieren mit

$$G = \langle x \rangle \rtimes \langle y \rangle,$$

wobei $|\langle x\rangle| = m$, $|\langle y\rangle| = n$, $yxy^{-1} = x^r$, $r^n \equiv 1 \pmod m$ mit $m, n, r \in \mathbb{N}$ und $\mathrm{ggT}((r-1)n, m) = 1$ ist. Wegen $yxy^{-1}x^{-1} = x^{r-1}$ und $\mathrm{ggT}(r-1, m) = 1$ ist $\langle x\rangle = \langle x^{r-1}\rangle \leq G'$. Da $G/\langle x\rangle$ abelsch ist, ist $G' \leq \langle x\rangle$, also ist $\langle x\rangle = G'$. Damit sind m und n in der obigen Darstellung eindeutig bestimmt. Wegen $\mathrm{ggT}(r, m) = 1 = \mathrm{ggT}(r-1, m)$ ist 2 kein Teiler von $m = |G'|$.
Es sei $H \leq G$. Dann ist $U := H \cap \langle x\rangle = \langle x^i\rangle$ für ein $i \in \mathbb{N}$ mit $i \bigm| m$. Ferner ist $U = \prod_{q\in M} H_q$, wobei $M = \{q : q \bigm| m,\ q \text{ Primzahl}\}$ und H_q für $q \in M$ die q-Sylowgruppe von H ist. Also ist $\mathrm{ggT}((H : U), |U|) = 1$. Wegen $U \trianglelefteq H$ existiert nach dem Satz von Schur-Zassenhaus eine Untergruppe $V \leq H$ mit $H = U \rtimes V$. Da $|V|$ ein Teiler von $|\langle y\rangle|$ ist, existiert nach dem Satz von Schur-Zassenhaus ein $g \in G$ mit ${}^gV \leq \langle y\rangle$. Also existiert ein $j \bigm| n$ mit ${}^gV = \langle y^j\rangle$, und wegen $U \trianglelefteq G$ folgt ${}^gH = \langle x^i\rangle \rtimes \langle y^j\rangle$.

Lemma 2.9.3 *Es sei G eine nicht-abelsche Z-Gruppe, und es sei p ein Primteiler von $|G'|$. Es sei $H < G$ eine echte Untergruppe mit $p \bigm| (H : H')$. Dann ist $H < N_G(H)$.*

Beweis: Nach Satz 2.9.1 existieren $n, m, r \in \mathbb{N}$ und zyklische Gruppen $\langle x\rangle, \langle y\rangle \leq G$ mit

$$G = \langle x\rangle \rtimes \langle y\rangle,$$

wobei $|G| = mn$, $x^m = 1 = y^n$, $yxy^{-1} = x^r$ mit $r > 1$ (da G nicht abelsch ist), $r^n \equiv 1 \pmod m$ und $\mathrm{ggT}((r-1)n, m) = 1$ gilt. Es sei $H < G$ mit $p \mid (H : H')$. Nach Bemerkung 2.9.2 existieren $g \in G$ und natürliche Zahlen $i \bigm| m$ und $j \bigm| n$ mit

$${}^gH = \langle x^i\rangle \rtimes \langle y^j\rangle.$$

Ist $j = 1$, so folgt aus $yx^iy^{-1}x^{-i} = (x^i)^{r-1}$ und $\mathrm{ggT}(r-1, m) = 1$ unmittelbar $\langle (x^i)^{r-1}\rangle = \langle x^i\rangle = H'$. Dann ist aber p kein Teiler von $(H : H')$. Also ist $j \neq 1$. Wegen $j \bigm| n$ ist dann $y \notin {}^gH$. Es ist aber $y \in N_G({}^gH)$, also ist ${}^gH < N_G({}^gH)$. Damit ist $H < N_G(H)$. □

Lemma 2.9.4 *Es seien G eine Z-Gruppe und u eine Torsionseinheit von $D(G)$. Dann ist $|\langle u\rangle|$ ein Teiler von $2(G : G')$. Ist $|G|$ gerade, so ist $|\langle u\rangle|$ ein Teiler von $(G : G')$.*

Beweis: Es sei $u \in U_T(D(G))$. Mit den Bezeichnungen aus Satz 2.6.7 sei $S := \{1, G\}$. Nach Satz 2.6.7 ist

$$u = \pm[G, \psi]_G(1 + v)$$

mit $\psi \in \hat{G}$, $1 + v \in U_T(D(G))$ und $v \in D(G)_{S(1)}$. Es sei

$$v := \sum_{[U,\lambda]_G \in \mathcal{M}(G)/G} z_{[U,\lambda]}[U, \lambda]_G$$

mit $z_{[U,\lambda]} \in \mathbb{Z}$ für alle $[U, \lambda]_G \in \mathcal{M}(G)/G$. Wegen $v \in D(G)_{S(1)}$ ist $z_{[G,\lambda]} = 0$ für alle $\lambda \in \hat{G}$. Angenommen, $|\langle u\rangle|$ ist kein Teiler von $2(G : G')$. Es ist $|\langle u\rangle|$ ein Teiler von $2|G|$, und da nach Bemerkung 2.9.2 $\mathrm{ggT}(|G'|, 2(G : G')) = 1$ ist, existiert ein Primteiler p von $|G'|$ mit $p \bigm| |\langle u\rangle|$. Insbesondere ist G nicht abelsch und $p \neq 2$. Wegen $|\langle \pm[G, \psi]_G\rangle| \bigm| 2(G : G')$ folgt $p \bigm| |\langle 1 + v\rangle|$. Also gibt es eine Untergruppe $T \leq G$, so dass $\rho_T(1 + v)$ eine Torsionseinheit in $\mathbb{Z}\hat{T}$ ist, deren Ordnung von p geteilt wird. Dabei ist ρ wieder die Einbettung von $D(G)$ in den Ghostring $\hat{D}(G)$ (siehe (2.11)) und ρ_T die entsprechende Projektion. Wegen $U_T(\mathbb{Z}\hat{T}) = \pm\hat{T}$ und $p \neq 2$

existiert also $\tau \in \hat{T}$ mit $\rho_T(1+v) = \pm\tau$, wobei p ein Teiler von $|\langle\tau\rangle|$ ist. Demnach gibt es ein $[H,\varphi]_G \in \mathcal{M}(G)/G$, so dass $z_{[H,\varphi]} \neq 0$ und τ ein Summand von

$$\rho_T([H,\varphi]_G) = \sum_{\substack{gH\in G/H \\ T\leq {}^gH}} {}^g\varphi_{|T}$$

ist. Es existiert also ein $g \in G$ mit $T \leq {}^gH$ und ${}^g\varphi_{|T} = \tau$. Es sei $H \leq G$ maximal gewählt mit der Eigenschaft, dass $T \leq H$ ist, und dass $\varphi \in \hat{H}$ existiert mit $\varphi_{|T} = \tau$ und $z_{[H,\varphi]} \neq 0$. Dann ist $H < G$. Wegen $\tau^{|\langle\varphi\rangle|} = (\varphi_{|T})^{|\langle\varphi\rangle|} = 1$ ist p ein Teiler von $|\langle\varphi\rangle|$, und damit ist p ein Teiler von $(H : H')$. Insbesondere ist $\varphi \neq 1$. Nach Lemma 2.9.3 ist $H < N_G(H)$. Es wird nun gezeigt, dass $\rho_H(1+v)$ keine Torsionseinheit in $\mathbb{Z}\hat{H}$ sein kann. Dazu werden wir zunächst zeigen, dass kein ${}^h\varphi$, $h \in N_G(H)$, als Summand in

$$\rho_H(v) - \rho_H(z_{[H,\varphi]}[H,\varphi]_G) = \rho_H\Big(\sum_{\substack{[U,\lambda]_G\in\mathcal{M}(G)/G \\ [U,\lambda]_G\neq[H,\varphi]_G}} z_{[U,\lambda]}[U,\lambda]_G\Big) \tag{2.35}$$

vorkommt. Angenommen, es existiert $h \in N_G(H)$, so dass ${}^h\varphi$ Summand in (2.35) ist. Dann existiert ein $[U,\lambda]_G \in \mathcal{M}(G)/G$ mit $[U,\lambda]_G \neq [H,\varphi]_G$ und $z_{[U,\lambda]} \neq 0$, so dass ${}^h\varphi$ ein Summand von

$$\rho_H([U,\lambda]_G) = \sum_{\substack{gU\in G/U \\ H\leq {}^gU}} {}^g\lambda_{|H}$$

ist. Dann ist aber $(H, {}^h\varphi) \leq ({}^gU, {}^g\lambda)$ für ein $g \in G$, und damit ist $(H,\varphi) \leq ({}^{h^{-1}g}U, {}^{h^{-1}g}\lambda)$. Aus der Maximalitätsbedingung von H folgt $(H,\varphi) = ({}^{h^{-1}g}U, {}^{h^{-1}g}\lambda)$, was im Widerspuch zu $[H,\varphi]_G \neq [U,\lambda]_G$ steht. Also ist ${}^h\varphi$ kein Summand in (2.35). Wegen

$$\rho_H([H,\varphi]_G) = \sum_{gH\in N_G(H)/H} {}^g\varphi$$

ist damit

$$\begin{aligned}\rho_H(1+v) &= 1 + z_{[H,\varphi]} \sum_{gH\in N_G(H)/H} {}^g\varphi + \rho_H\Big(\sum_{\substack{[U,\lambda]_G\in\mathcal{M}(G)/G \\ [U,\lambda]_G\neq[H,\varphi]_G}} z_{[U,\lambda]}[U,\lambda]_G\Big) \\ &= 1 + z_{[H,\varphi]} \sum_{gH\in N_G(H)/H} {}^g\varphi + \sum_{i=1}^{n} l_i\psi_i\end{aligned}$$

mit $n \in \mathbb{N}$, $l_i \in \mathbb{Z}$ und $\psi_i \in \hat{H}$ mit $\psi_i \neq {}^g\varphi$ für alle $g \in N_G(H)$ und alle $i = 1, ..., n$. Wegen $\varphi \neq 1$, $U_T(\mathbb{Z}\hat{H}) = \pm\hat{H}$ und $H < N_G(H)$ ist $\rho_H(1+v)$ keine Torsionseinheit in $U_T(\mathbb{Z}\hat{H})$. Also ist die Annahme zu einem Widerspruch geführt, und es ist $|\langle u\rangle|$ ein Teiler von $2(G:G')$. Es sei $|G|$ gerade. Dann ist $|\langle u\rangle|$ ein Teiler von $|G|$. Es existiert $z \in \mathbb{Z}$ mit $|\langle u\rangle|z = 2(G:G')$. Wegen $2 \nmid |G'|$ und $|\langle u\rangle| \mid |G|$ folgt aus $|\langle u\rangle||G'|z = 2|G|$, dass 2 ein Teiler von z ist. Also ist $|\langle u\rangle|$ ein Teiler von $(G:G')$. $\square$

Lemma 2.9.5 *Es seien G und $\tilde{G}$ Z-Gruppen. Ist $D(G) \cong D(\tilde{G})$, so ist $G/G' \cong \tilde{G}/\tilde{G}'$.*

Beweis: Nach Bemerkung 2.9.2 ist G/G' zyklisch. Es sei $\xi \in \mathbb{C}$ eine primitive $(G : G')$-te Einheitswurzel, und es seien $c \in G$ mit $\langle cG' \rangle = G/G'$ und $\lambda \in \hat{G}$ mit $\lambda(c) = \xi$. Für alle $u \in U_T(D(G))$ und alle $(H, hH') \in \mathcal{D}(G)$ folgt aus Lemma 2.9.4, dass $s^{D(G)}_{(H,hH')}(u) = \pm\xi^i$ mit $i \in \{1, ..., (G : G')\}$ ist. Ferner ist $\pm[G, \lambda]_G \in U_T(D(G))$ und $s^{D(G)}_{(G,cG')}(\pm[G, \lambda]_G) = \pm\xi$. Da 2 kein Teiler von $|G'|$ ist, folgt

$$\max\{|\langle u \rangle| : u \in U_T(D(G))\} = \begin{cases} (G : G') & \text{falls } |G| \text{ gerade} \\ 2(G : G') & \text{falls } |G| \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Also ist $(G : G') = (\tilde{G} : \tilde{G}')$, und da G/G' und $\tilde{G}/\tilde{G}'$ zyklisch sind, folgt $G/G' \cong \tilde{G}/\tilde{G}'$. □

Satz 2.9.6 *Es seien G und $\tilde{G}$ Z-Gruppen. Ist $D(G) \cong D(\tilde{G})$, so ist $G \cong \tilde{G}$.*

Beweis: Nach Satz 2.9.1 existieren $x, y \in G$ und $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{G}$ mit

$$G = \langle x \rangle \rtimes \langle y \rangle \quad \text{und} \quad \tilde{G} = \langle \tilde{x} \rangle \rtimes \langle \tilde{y} \rangle.$$

Dabei ist $|\langle x \rangle| = m$, $|\langle y \rangle| = n$, $yxy^{-1} = x^r$, $r, m, n \in \mathbb{N}$, mit $r^n \equiv 1 \pmod m$ und $\mathrm{ggT}((r-1)n, m) = 1$, und es ist $|\langle \tilde{x} \rangle| = \tilde{m}$, $|\langle \tilde{y} \rangle| = \tilde{n}$, $\tilde{y}\tilde{x}\tilde{y}^{-1} = \tilde{x}^s$, $s, \tilde{m}, \tilde{n} \in \mathbb{N}$, mit $s^{\tilde{n}} \equiv 1 \pmod{\tilde{m}}$ und $\mathrm{ggT}((s-1)\tilde{n}, \tilde{m}) = 1$. Ferner sind $m, \tilde{m}, n, \tilde{n} \in \mathbb{N}$ eindeutig bestimmt. Wir setzen $X := \langle x \rangle$, $\tilde{X} := \langle \tilde{x} \rangle$ und $Y := \langle y \rangle$.
Es sei $H := C_G(X)$. Wegen $N_G(X) = G$ ist $H \trianglelefteq G$. Nach Bemerkung 2.9.2 ist $H = X \rtimes H_Y$ mit $H_Y \leq Y$. Also ist $H_Y \leq Z(G)$, und es gilt $H = X \times H_Y$. Damit ist H ein abelscher Normalteiler in G, und wegen $\mathrm{ggT}(|X|, |H_Y|) = 1$ sind alle Untergruppen $U \leq H$ von der Form $U = U_X \times U_Y$ mit $U_X \leq X$ und $U_Y \leq H_Y \leq U \cap Z(G)$. Da X ein zyklischer Normalteiler von G ist, sind alle Untergruppen von H normal in G. Wir setzen $t := (G : H)$. Dann ist $1, y, ..., y^{t-1}$ ein System von Linksnebenklassenvertretern von H in G. Wegen $y^t \in Z(G)$ ist $x = x^{r^t}$. Außerdem ist $x \neq x^{r^k}$ für alle $k \in \{1, ..., t-1\}$. Also ist $r + m\mathbb{Z}$ eine primitive t-te Einheitswurzel in $\mathbb{Z}/mZ$.
Analog setzen wir $\tilde{H} := C_{\tilde{G}}(\tilde{X})$. Wir zeigen zunächst die Gültigkeit der folgenden Aussage:

$$A := \{e^{D(G)}_{(U,uU')} : m \text{ teilt den Führer von } e^{D(G)}_{(U,uU')}\} = \{e^{D(G)}_{(U,uU')} : U \leq H\} =: B. \tag{2.36}$$

Es sei $e^{D(G)}_{(U,uU')} \in B$. Dann ist U abelsch, also ist der Führer von $e^{D(G)}_{(U,u)}$ gleich $|N_G(U, u)|$. Weiterhin ist $X \leq C_G(H)$, also ist $X \leq N_G(U, u)$. Damit ist m ein Teiler des Führers von $e^{D(G)}_{(U,u)}$.
Es sei umgekehrt $e^{D(G)}_{(U,uU')} \in A$. Nach Bemerkung 2.9.2 existiert $g \in G$ mit ${}^gU = U_X \rtimes U_Y$, wobei $U_X \leq X$ und $U_Y \leq Y$ ist. Wegen $e^{D(G)}_{(U,uU')} = e^{D(G)}_{{}^g(U,uU')}$ können wir $U = U_X \rtimes U_Y$ annehmen. Da U/U_X abelsch ist, ist $U' \leq U_X$. Wegen $m = |X| \mid (N_G(U, uU') : U')$ und $|G| = mn$ mit $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$ folgt $U' = 1$. Also ist U abelsch, und damit ist $U = U_X \times U_Y$. Nun ist $m \mid |N_G(U, uU')| \mid |N_G(U)|$. Also ist $X \leq N_G(U)$, und damit ist $x \in N_G(U)$. Es sei $y^i \in U_Y$ für ein $i \in \mathbb{N}$. Wegen ${}^xU_Y = U_Y$ ist $xy^ix^{-1} = y^j$ für ein $j \in \mathbb{N}$. Also ist $y^{j-i}x = y^{-i}xy^i \in X$, und es folgt $y^i = y^j$. Also ist $U_Y \leq H$, und damit ist $U \leq H$. Es folgt $A = B$.

Es sei $\alpha : D(\tilde{G}) \to D(G)$ ein Isomorphismus. Nach Lemma 2.9.5 ist $m = \tilde{m}$. Wegen Aussage (2.36) gilt damit

$$\alpha(\{e^{D(\tilde{G})}_{(\tilde{U},\tilde{u})} : \tilde{U} \leq \tilde{H}\}) = \{e^{D(G)}_{(U,u)} : U \leq H\}. \tag{2.37}$$

Also ist

$$s^{D(\tilde{G})}_{(\tilde{H},\tilde{x})} = s^{D(G)}_{(V,v)} \circ \alpha \tag{2.38}$$

für ein $V \leq H$ und ein $v \in V$. Wir zeigen im folgenden, dass

$$s^{D(\tilde{G})}_{(\tilde{H},\tilde{x})} = s^{D(\tilde{G})}_{(\tilde{H},\tilde{x}^{r^i})} \tag{2.39}$$

für alle $i = 0, ..., t-1$ ist. Wir werden hierfür einige Zwischenschritte benötigen. Es sei $\zeta \in \mathbb{C}$ eine primitive $|G|$-te Einheitswurzel. Für $i = 0, ..., t-1$ wählen wir $k_i \in \mathbb{N}$ mit den Eigenschaften

$$k_i \equiv r^i \pmod{m} \ \text{ und } \ k_i \equiv 1 \pmod{n}.$$

Dann ist $\mathrm{ggT}(k_i, |G|) = \mathrm{ggT}(k_i, mn) = \mathrm{ggT}(k_i, m)\mathrm{ggT}(k_i, n) = \mathrm{ggT}(r^i, m) = 1$ für alle k_i. Wir definieren $\sigma_i \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ durch $\sigma_i(\zeta) := \zeta^{k_i}$ für alle $i = 0, ..., t-1$. Damit ist $\sigma_i \circ s^{D(\tilde{G})}_{(\tilde{H},\tilde{x})}$ eine Spezies von $D(\tilde{G})$ für alle i. Es seien nun $[\tilde{U}, \tilde{\lambda}]_{\tilde{G}} \in \mathcal{M}(\tilde{G})/\tilde{G}$ und $i \in \{0, ..., t-1\}$. Es ist

$$s^{D(\tilde{G})}_{(\tilde{H},\tilde{x})}([\tilde{U}, \tilde{\lambda}]_{\tilde{G}}) = \sum_{\substack{g\tilde{U} \in \tilde{G}/\tilde{U} \\ \tilde{H} \leq {}^g\tilde{U}}} {}^g\tilde{\lambda}(\tilde{x}),$$

und da $\tilde{H} \trianglelefteq \tilde{G}$ ist, ist $s^{D(\tilde{G})}_{(\tilde{H},\tilde{x})}([\tilde{U}, \tilde{\lambda}]_{\tilde{G}}) = 0$ im Fall $\tilde{H} \not\leq \tilde{U}$. Es sei $\tilde{H} \leq \tilde{U}$. Dann ist

$$(\sigma_i \circ s^{D(\tilde{G})}_{(\tilde{H},\tilde{x})})([\tilde{U}, \tilde{\lambda}]_{\tilde{G}}) = \sigma_i(\sum_{g\tilde{U} \in \tilde{G}/\tilde{U}} {}^g\tilde{\lambda}(\tilde{x})) = \sum_{g\tilde{U} \in \tilde{G}/\tilde{U}} ({}^g\tilde{\lambda}(\tilde{x}))^{k_i}.$$

Wegen $({}^g\tilde{\lambda}(\tilde{x}))^m = 1$ ist $({}^g\tilde{\lambda}(\tilde{x}))^{k_i} = ({}^g\tilde{\lambda}(\tilde{x}))^{r^i} = {}^g\tilde{\lambda}(\tilde{x}^{r^i})$ für alle $g \in \tilde{G}$. Also ist

$$(\sigma_i \circ s^{D(\tilde{G})}_{(\tilde{H},\tilde{x})})([\tilde{U}, \tilde{\lambda}]_{\tilde{G}}) = \sum_{g\tilde{U} \in \tilde{G}/\tilde{U}} {}^g\tilde{\lambda}(\tilde{x}^{r^i}) = s^{D(\tilde{G})}_{(\tilde{H},\tilde{x}^{r^i})}([\tilde{U}, \tilde{\lambda}]_{\tilde{G}}).$$

Es folgt

$$\sigma_i \circ s^{D(\tilde{G})}_{(\tilde{H},\tilde{x})} = s^{D(\tilde{G})}_{(\tilde{H},\tilde{x}^{r^i})}. \tag{2.40}$$

Nun ist $s^{D(\tilde{G})}_{(\tilde{H},\tilde{x})} = s^{D(G)}_{(V,v)} \circ \alpha$ für ein $(V, v) \in \mathcal{D}(G)$ mit $V \leq H$. Um Gleichung (2.39) zu zeigen, werden wir beweisen, dass $\sigma_i \circ s^{D(G)}_{(V,v)} = s^{D(G)}_{(V,v)}$ gilt. Es sei $[U, \lambda]_G \in \mathcal{M}(G)/G$. Nun ist

$$s^{D(G)}_{(V,v)}([U, \lambda]_G) = \sum_{\substack{gU \in G/U \\ V \leq {}^gU}} {}^g\lambda(v),$$

und wegen $V \trianglelefteq G$ ist $s^{D(G)}_{(V,v)}([U, \lambda]_G) = 0$, falls $V \not\leq U$ ist. Es sei also $V \leq U$. Nach Bemerkung 2.9.2 können wir annehmen, dass

$$U = \langle x^a \rangle \rtimes \langle y^b \rangle$$

mit $a \mid m$ und $b \mid n$ ist. Dann ist $1, x, x^2, ..., x^{a-1}$ ein Vertretersystem der Linksnebenklassen von U in $X \rtimes \langle y^b \rangle$. Weiterhin ist $1, y, y^2, ..., y^{b-1}$ ein Vertretersystem der Linksnebenklassen von $X \rtimes \langle y^b \rangle$ in G. Also ist $y^j x^k$, $j = 0, ..., b-1$, $k = 0, ..., a-1$ ein Vertretersystem der Linksnebenklassen von U in G. Wegen $V = V_X \times V_Y$ mit $V_X \leq X$ und $V_Y \leq Y$ existieren eindeutig bestimmte $v_x \in V_X$ und $v_y \in V_Y$ mit $v = v_x v_y$. Insbesondere ist $v_y \in Z(G)$. Dann ist

$$\begin{aligned} s_{(V,v)}^{D(G)}([U,\lambda]_G) &= \sum_{\substack{gU \in G/U \\ V \leq {}^gU}} {}^g\lambda(v) = \sum_{gU \in G/U} {}^g\lambda(v_x) {}^g\lambda(v_y) = \lambda(v_y) \sum_{j=0}^{b-1} \sum_{k=0}^{a-1} \lambda(y^j x^k v_x x^{-k} y^{-j}) \\ &= \lambda(v_y) a \sum_{j=0}^{b-1} \lambda(y^j v_x y^{-j}). \end{aligned}$$

Wegen $\lambda(v_y)^n = 1$ ist $\lambda(v_y)^{k_i} = \lambda(v_y)$, und wegen $\lambda(y^i v_x y^{-i})^m = 1$ ist $\lambda(y^i v_x y^{-i})^{k_i} = \lambda(y^i v_x y^{-i})^{r^i}$. Wegen $y^b \in U$ gilt außerdem $\lambda(v_x) = \lambda(y^b v_x y^{-b}) = \lambda(v_x)^{r^b}$, also ist

$$\sum_{j=0}^{b-1} \lambda(y^j v_x y^{-j})^{r^i} = \sum_{j=0}^{b-1} \lambda(v_x)^{r^{j+i}} = \sum_{j=0}^{b-1} \lambda(v_x)^{r^j} = \sum_{j=0}^{b-1} \lambda(y^j v_x y^{-j}).$$

Damit ist

$$\begin{aligned} (\sigma_i \circ s_{(V,v)}^{D(G)})([U,\lambda]_G) &= \lambda(v_y)^{k_i} a \sum_{j=0}^{b-1} \lambda(y^j v_x y^{-j})^{k_i} = \lambda(v_y) a \sum_{j=0}^{b-1} \lambda(y^j v_x y^{-j})^{r^i} \\ &= \lambda(v_y) a \sum_{j=0}^{b-1} \lambda(y^j v_x y^{-j}) = s_{(V,v)}^{D(G)}([U,\lambda]_G), \end{aligned}$$

und es folgt $\sigma_i \circ s_{(V,v)}^{D(G)} = s_{(V,v)}^{D(G)}$. Aus Gleichung (2.40) ergibt sich

$$s_{(\tilde{H},\tilde{x}^{r^i})}^{D(\tilde{G})} = \sigma_i \circ s_{(\tilde{H},\tilde{x})}^{D(\tilde{G})} = \sigma_i \circ s_{(V,v)}^{D(G)} \circ \alpha = s_{(V,v)}^{D(G)} \circ \alpha = s_{(\tilde{H},\tilde{x})}^{D(\tilde{G})}.$$

Damit ist $[\tilde{H}, \tilde{x}]_{\tilde{G}} = [\tilde{H}, \tilde{x}^{r^i}]_{\tilde{G}}$, und da $i \in \{0, ..., t-1\}$ beliebig gewählt war, sind $\tilde{x}$ und $\tilde{x}^{r^i}$ für alle $i = 0, ..., t-1$ in $\tilde{G}$ konjugiert. Es sei $\tilde{t} := (\tilde{G} : \tilde{H})$. Dann ist $\{\tilde{x}^{s^j} : j = 0, ..., \tilde{t}-1\}$ die Konjugationsklasse von $\tilde{x}$ in $\tilde{G}$. Also ist

$$\{r^i + m\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} : i = 0, ..., t-1\} \subseteq \{s^j + m\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} : j = 0, ..., \tilde{t}-1\}.$$

Betrachtet man umgekehrt den Isomorphismus $\alpha^{-1} : D(G) \to D(\tilde{G})$, so erhält man mit der gleichen Argumentation

$$\{s^j + m\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} : j = 0, ..., \tilde{t}-1\} \subseteq \{r^i + m\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} : i = 0, ..., t-1\},$$

also sind beide Mengen gleich. Da $r + m\mathbb{Z}$ eine primitive t-te Einheitswurzel und $s + m\mathbb{Z}$ eine primitive $\tilde{t}$-te Einheitswurzel in $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ist, ist

$$\tilde{t} = |\{s^j + m\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} : j = 0, ..., \tilde{t}-1\}| = |\{r^i + m\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} : i = 0, ..., t-1\}| = t.$$

Also existiert ein $l \in \mathbb{N}$ mit $r^l \equiv s \pmod{m}$ und $\mathrm{ggT}(l,t) = 1$. Es sei c das Produkt aller Primteiler von n, die t nicht teilen. Dann existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$k \equiv l \pmod{t} \quad \text{und} \quad k \equiv 1 \pmod{c}.$$

Wegen $\mathrm{ggT}(k,tc) = \mathrm{ggT}(k,t) = \mathrm{ggT}(l,t) = 1$ ist $\mathrm{ggT}(k,n) = 1$. Also ist

$$G = \langle x \rangle \rtimes \langle y \rangle = \langle x \rangle \rtimes \langle y^k \rangle \quad \text{mit} \quad y^k x y^{-k} = x^{r^k} = x^{r^l} = x^s.$$

Damit sind die Gruppen G und $\tilde{G}$ isomorph. □

Beispiel 2.9.7 Gegeben seien die Gruppen

$$G := \langle x \rangle \rtimes \langle y \rangle \quad \text{und} \quad \tilde{G} := \langle \tilde{x} \rangle \rtimes \langle \tilde{y} \rangle$$

der Ordnung 273 mit $x^{91} = y^3 = 1$ und $yxy^{-1} := x^9$, sowie mit $\tilde{x}^{91} = \tilde{y}^3 = 1$ und $\tilde{y}\tilde{x}\tilde{y}^{-1} := \tilde{x}^{16}$. Dabei ist $\mathrm{ggT}((9-1)3, 91) = 1 = \mathrm{ggT}((16-1)3, 91)$. Nach Bemerkung 2.9.2 ist $G' = \langle x \rangle$ und $\tilde{G}' = \langle \tilde{x} \rangle$. Weiterhin sind $\{x, x^9, x^{81}\}$ und $\{\tilde{x}, \tilde{x}^{16}, \tilde{x}^{74}\}$ die Konjugationsklassen von x und $\tilde{x}$ in G und $\tilde{G}$ (unter Berücksichtigung von $16^2 \equiv 74 \pmod{91}$). Angenommen, es existiert ein Isomorphismus $\alpha : \tilde{G} \to G$. Dann ist $\{\alpha(\tilde{x}), \alpha(\tilde{x})^{16}, \alpha(\tilde{x})^{74}\}$ die Konjugationsklasse von $\alpha(\tilde{x})$ in G. Ferner existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(k, 91) = 1$ und $\alpha(\tilde{x})^k = x$. Also sind $\alpha(\tilde{x})^k = x$ und $\alpha(\tilde{x})^{16k} = x^{16}$ in G konjugiert. Es ist aber $9 \not\equiv 16 \not\equiv 81 \pmod{91}$. Also ist $G \ncong \tilde{G}$.
Nach Satz 2.9.6 ist also $D(G) \ncong D(\tilde{G})$. In G werden die Konjugationsklassen der Untergruppen durch die folgenden Untergruppen repräsentiert:

$$1,\ \langle x \rangle,\ \langle x^7 \rangle,\ \langle x^{13} \rangle,\ \langle y \rangle,\ \langle y, x^7 \rangle,\ \langle y, x^{13} \rangle \text{ und } G.$$

Für die Gruppe $\tilde{G}$ können die entsprechenden Repräsentanten für die Konjugationsklassen der Untergruppen gewählt werden:

$$1,\ \langle \tilde{x} \rangle,\ \langle \tilde{x}^7 \rangle,\ \langle \tilde{x}^{13} \rangle,\ \langle \tilde{y} \rangle,\ \langle \tilde{y}, \tilde{x}^7 \rangle,\ \langle \tilde{y}, \tilde{x}^{13} \rangle \text{ und } \tilde{G}.$$

Die Markentafeln (Tabelle 2.2) beider Gruppen sind identisch, also sind die jeweiligen Burnsideringe $B(G)$ und $B(\tilde{G})$ isomorph.

Bemerkung 2.9.8 In [Th88] werden Paare nicht-isomorpher endlicher Gruppen konstruiert, deren Burnsideringe isomorph sind. Es handelt sich hierbei zwar nicht um Z-Gruppen, aber aufgrund der Ähnlichkeit zu dem obigen Beispiel soll hier die Konstruktion dieser Gruppen erläutert werden. Desweiteren werden wir zeigen, dass das kleinste Beispiel für ein solches Paar nicht-isomorphe monomiale Darstellungsringe hat.
Es seien p und $q \neq 2$ Primzahlen mit $q \mid p-1$, $a, b \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ primitive q-te Einheitswurzeln, $\langle x \rangle = P_a = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $\langle y \rangle = P_b = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ und $\langle z \rangle = Q_{a,b} \cong \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Wir schreiben P_a und P_b additiv und $Q_{a,b}$ multiplikativ. Es sei

$$G(a,b) := (P_a \times P_b) \rtimes Q_{a,b},$$

wobei $Q_{a,b}$ durch $Q_{a,b} \to \mathrm{Aut}(P_a \times P_b)$, $z \mapsto \tau_z$ mit $\tau_z(x) = ax$ und $\tau_z(y) = by$ auf $P_a \times P_b$ operiert. Es sind

$$1,\ P_a,\ P_b,\ P_a \times P_b \text{ und } G(a,b)$$

	1	$\langle y\rangle$	$\langle x^{13}\rangle$	$\langle x^7\rangle$	$\langle y,x^{13}\rangle$	$\langle y,x^7\rangle$	$\langle x\rangle$	G
$s_1^{B(G)}$	273	91	39	21	13	7	3	1
$s_{\langle y\rangle}^{B(G)}$	0	1	0	0	1	1	0	1
$s_{\langle x^{13}\rangle}^{B(G)}$	0	0	39	0	13	0	3	1
$s_{\langle x^7\rangle}^{B(G)}$	0	0	0	21	0	7	3	1
$s_{\langle y,x^{13}\rangle}^{B(G)}$	0	0	0	0	1	0	0	1
$s_{\langle y,x^7\rangle}^{B(G)}$	0	0	0	0	0	1	0	1
$s_{\langle x\rangle}^{B(G)}$	0	0	0	0	0	0	3	1
$s_G^{B(G)}$	0	0	0	0	0	0	0	1

Tabelle 2.2: Die Markentafel von $B(G)$. Ersetzt man y und x jeweils durch $\tilde{y}$ und $\tilde{x}$, so erhält man die Markentafel von $D(\tilde{G})$.

die Normalteiler von $G(a,b)$. Die Konjugationsklasssen der nicht-normalen Untergruppen werden von den Gruppen

$$Q_{a,b},\ P_a \rtimes Q_{a,b},\ P_b \rtimes Q_{a,b},\ I_{a,b,1},...,I_{a,b,l}$$

mit $l = (p-1)/q$ repräsentiert. Dabei sind $I_{a,b,1},...,I_{a,b,l}$ Untergruppen von $P_a \times P_b$ der Ordnung p.
Sind $\tilde{a},\tilde{b} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ primitive q-te Einheitswurzeln mit $a \neq b$, $\tilde{a} \neq \tilde{b}$ und $\{a,b\} \neq \{\tilde{a}^k,\tilde{b}^k\}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so ist $G(a,b) \ncong G(\tilde{a},\tilde{b})$, aber $B(G(a,b)) \cong B(G(\tilde{a},\tilde{b}))$ (siehe [Th88]). Das kleinste Beispiel eines solchen Paares von Gruppen erhält man für $p = 11$, $q = 5$, $a = 3+11\mathbb{Z} = \tilde{a}$, $b = 4+11\mathbb{Z}$, $\tilde{b} = 5+11\mathbb{Z}$. Wir setzen $G := G(3+11\mathbb{Z},5+11\mathbb{Z})$ und $\tilde{G} := G(3+11\mathbb{Z},4+11\mathbb{Z})$. Ferner seien $\tilde{x},\tilde{y} \in \tilde{G}$ mit $P_{\tilde{a}} = \langle\tilde{x}\rangle$ und $P_{\tilde{b}} = \langle\tilde{y}\rangle$.
Wir werden nun zeigen, dass $D(G) \ncong D(\tilde{G})$ ist. Hierbei werden einige Computerberechnungen benutzt, auf die wir nicht im Detail eingehen werden. Es seien $\xi \in \mathbb{C}$ eine primitive 11-te Einheitswurzel und $\lambda \in \mathrm{Hom}(P_a \times P_b, \mathbb{C}^\times)$ mit $\lambda(x) = \xi$ und $\lambda(y) = \xi$. Für $(T,tT') \in \mathcal{D}(G)$ sei $f_{(T,tT')}^{D(G)} \in \mathbb{Z}$ der Führer des primitiven Idempotentes $e_{(T,tT')}^{D(G)} \in D_{\mathbb{Q}(\zeta)}(G)$ ($\zeta \in \mathbb{C}$ primitive $|G|$-te Einheitswurzel), und für $(\tilde{T},\tilde{t}\tilde{T}') \in \mathcal{D}(\tilde{G})$ sei $f_{(\tilde{T},\tilde{t}\tilde{T}')}^{D(\tilde{G})} \in \mathbb{Z}$ der Führer des primitiven Idempotentes $e_{(\tilde{T},\tilde{t}\tilde{T}')}^{D(\tilde{G})}$ von $D_{\mathbb{Q}(\zeta)}(\tilde{G})$. Wir betrachten das Element

$$c := [P_a \times P_b, \lambda]_G \in D(G).$$

Es ist

$$s_{(P_a\times P_b,x)}^{D(G)}(c) = s_{(P_a\times P_b,y)}^{D(G)}(c) = s_{(P_a,x)}^{D(G)}(c) = s_{(P_b,y)}^{D(G)}(c) = \xi+\xi^3+\xi^4+\xi^5+\xi^9 =: u, \tag{2.41}$$

$$s_{(P_a\times P_b,2x)}^{D(G)}(c) = s_{(P_a\times P_b,2y)}^{D(G)}(c) = s_{(P_a,2x)}^{D(G)}(c) = s_{(P_b,2y)}^{D(G)}(c) = \xi^2+\xi^6+\xi^7+\xi^8+\xi^{10} =: v \tag{2.42}$$

und

$$s_{(T,tT')}^{D(G)}(c) \notin \{u,v\} \tag{2.43}$$

für alle $(T, tT') \in \mathcal{D}(G)$ mit $f_{(T,tT')}^{D(G)} = 121$ und

$$[T, tT']_G \notin \{[P_a \times P_b, ix]_G,\ [P_a \times P_b, iy]_G,\ [P_a, ix]_G,\ [P_b, iy]_G\} \quad (i = 1, 2).$$

Wir setzen

$$W := \{s_{(T,tT')}^{D(G)}(c)\ :\ f_{(T,tT')}^{D(G)} = 121,\ t \neq 0\}.$$

Dann ist $u, v \in W$. Es sei $V := W \backslash \{u, v\}$.
Angenommen, es existiert ein Isomorphismus $\alpha : D(G) \to D(\tilde{G})$. Es sei $\tilde{c} := \alpha(c)$. Wir zeigen, dass $\tilde{c}$ keine $\mathbb{Z}$-Linearkombination der kanonischen Basiselemente von $D(\tilde{G})$ sein kann. Es sei

$$\tilde{c} = \sum_{[\tilde{U},\tilde{\lambda}]_{\tilde{G}} \in \mathcal{M}(\tilde{G})/\tilde{G}} z_{[\tilde{U},\tilde{\lambda}]}[\tilde{U}, \tilde{\lambda}]_{\tilde{G}}$$

mit $z_{[\tilde{U},\tilde{\lambda}]} \in \mathbb{Z}$ für $[\tilde{U}, \tilde{\lambda}]_{\tilde{G}} \in \mathcal{M}(\tilde{G})/\tilde{G}$. Für $\tilde{t} \in P_{\tilde{a}} \times P_{\tilde{b}}$ ist dann

$$s_{(P_{\tilde{a}} \times P_{\tilde{b}}, \tilde{t})}^{D(\tilde{G})}(\tilde{c}) = \sum_{\substack{[\tilde{U},\tilde{\lambda}]_{\tilde{G}} \in \mathcal{M}(\tilde{G})/\tilde{G} \\ \tilde{U} \in \{P_{\tilde{a}} \times P_{\tilde{b}}, \tilde{G}\}}} z_{[\tilde{U},\tilde{\lambda}]} s_{(P_{\tilde{a}} \times P_{\tilde{b}}, \tilde{t})}^{D(\tilde{G})}([\tilde{U}, \tilde{\lambda}]_{\tilde{G}}).$$

Ist $0 \neq \tilde{t} \in P_{\tilde{a}} \times P_{\tilde{b}}$, so ist $f_{(P_{\tilde{a}} \times P_{\tilde{b}}, \tilde{t})}^{D(\tilde{G})} = 121$, und aus der Beweisführung von Satz 2.5.4 folgt, dass

$$s_{(P_{\tilde{a}} \times P_{\tilde{b}}, \tilde{t})}^{D(\tilde{G})}(\tilde{c}) \in W$$

ist. Es kann nachgerechnet werden, dass keine ganzen Zahlen $z_{[\tilde{U},\tilde{\lambda}]} \in \mathbb{Z}$, $\tilde{U} \in \{P_{\tilde{a}} \times P_{\tilde{b}}, \tilde{G}\}$, $\tilde{\lambda} \in \hat{\tilde{U}}$, existieren mit $s_{(P_{\tilde{a}} \times P_{\tilde{b}}, \tilde{t})}^{D(\tilde{G})}(\tilde{c}) \in V$ für $\tilde{t} = \tilde{x} + i\tilde{y} \in P_{\tilde{a}} \times P_{\tilde{b}}$, $i = 0, ..., 10$. Also ist

$$s_{(P_{\tilde{a}} \times P_{\tilde{b}}, \tilde{t})}^{D(\tilde{G})}(\tilde{c}) \in \{u, v\}$$

für alle $\tilde{x} + i\tilde{y}$, $i = 0, ..., 10$. Wie man in den Gleichungen (2.41), (2.42) und (2.43) sieht, sind genau vier Spezieswerte von c gleich u, und es sind genau vier Spezieswerte von c gleich v. Nun sind die Bahnen $[P_{\tilde{a}} \times P_{\tilde{b}}, \tilde{x} + i\tilde{y}]_{\tilde{G}}$, $i = 0, ..., 10$, paarweise verschieden, und es gilt $\tilde{x} + i\tilde{y} \neq 0$ für alle $i = 0, ..., 10$. Also existiert $j \in \{0, ..., 10\}$ mit

$$s_{(P_{\tilde{a}} \times P_{\tilde{b}}, \tilde{x} + j\tilde{y})}^{D(\tilde{G})}(\tilde{c}) \in V,$$

woraus wir einen Widerspruch erhalten. Also existiert kein Isomorphismus $\alpha : D(G) \to D(\tilde{G})$.

Bemerkung 2.9.9 Ein weiteres Paar nicht-isomorpher Gruppen mit isomorphen Burnsideringen wurde in [Br95] konstruiert und ist gegeben durch

$$G := \langle x, y, z \mid x^9 = y^9 = z^9 = [x, z] = [y, z] = 1, [x, y] = z \rangle$$

und

$$\tilde{G} := \langle x, y, z \mid x^9 = y^9 = z^9 = [y, z] = 1, [x, z] = z^3, [x, y] = z \rangle.$$

Es ist $|G| = 729 = |\tilde{G}|$ und $|\mathcal{M}(G)/G| = 1411 = |\mathcal{M}(\tilde{G})/\tilde{G}|$. Es sei $\zeta \in \mathbb{C}$ eine primitive 729-te Einheitswurzel. In $D_{\mathbb{Q}(\zeta)}(G)$ gibt es 762 primitive Idempotente mit Führer 81, 348 primitive Idempotente mit Führer 243 und 301 primitive Idempotente mit Führer 729. In $D_{\mathbb{Q}(\zeta)}(\tilde{G})$ gibt es 735 primitive Idempotente mit Führer 81, 456 primitive Idempotente mit Führer 243 und 220 primitive Idempotente mit Führer 729. Also sind $D(G)$ und $D(\tilde{G})$ nicht isomorph.

2.10 Die Automorphismengruppe

Durch die Wahl eines geeigneten Automorphismus γ des Darstellungsringes $D(G)$ erhält man die Möglichkeit, einen gegebenen Isomorphismus $\alpha : D(\tilde{G}) \to D(G)$ durch die Verknüpfung $\gamma \circ \alpha$ zu lenken. Dies hat sich bei der entsprechenden Betrachtung des Burnsideringes als nützlich erwiesen: Ein Isomorphismus $\beta : B(G) \to B(\tilde{G})$ kann durch einen normalisierten Isomorphismus ersetzen werden, das heißt, man kann ohne Einschränkung von der Situation $\beta(e_1^{B(G)}) = e_1^{B(\tilde{G})}$ ausgegehen ([Ra04]). Grundlegend hierfür waren unter anderem die Konstruktion eines bestimmten Automorphismus des Burnsideringes in [Ni76]. Viele Ergebnisse zum Isomorphieproblem von Burnsideringen sind durch die Verwendung normalisierter Isomorphismen beinflusst (siehe beispielsweise [Ra05] oder [Ki06]). Weitere Untersuchungen zur Automorphismengruppe des Burnsideringes befinden sich in [Ki95].
In diesem Abschnitt soll in Analogie zu [Ni76], Prop. 3.4, ein Automorphismus von $D(G)$ konstruiert werden.

Lemma 2.10.1 *Es seien G eine endliche Gruppe, p eine Primzahl und $P \trianglelefteq G$, $U \leq G$ mit $|P| = p$ und $p \nmid |U|$.*

(i) Es sei $H \leq U$ mit $H \not\leq C_U(P)$ und $H \leq {}^g(PU)$ für ein $g \in G$. Dann existiert genau ein $y \in P$ mit $H \leq {}^{gy}U$.

(ii) Es sei $H \leq C_U(P)$ mit $H \leq {}^g(PU)$ für ein $g \in G$. Dann ist $H \leq {}^{gy}U$ für alle $y \in P$.

Beweis: (i) Nach dem Satz von Schur-Zassenhaus existieren ein $w \in P$ und ein $u \in U$ mit $H \leq {}^{wgug^{-1}}({}^gU) = {}^{wg}U$. Wegen $P \trianglelefteq G$ existiert dann $y \in P$ mit $H \leq {}^{gy}U$.
Es ist $H \not\leq_G C_U(P)$, denn aus $H \leq {}^tC_U(P)$ für ein $t \in G$ folgt $H \leq C_{{}^tU}(P) \cap U \leq C_U(P)$. Also existiert ein $h \in {}^{y^{-1}g^{-1}}H \leq U$ mit $h \notin C_U(P)$. Wegen $|P| = p$ wird P von allen Elementen $1 \neq x \in P$ erzeugt, also ist $hxh^{-1} \neq x$ für alle $1 \neq x \in P$.
Es sei nun $y' \in P$ mit $H \leq {}^{gy'}U$. Aus ${}^{(y')^{-1}g^{-1}}H \leq U$ folgt wegen $gyhy^{-1}g^{-1} \in H$ unmittelbar $(y')^{-1}yhy^{-1}y' \in U$. Es existiert ein $i \in \mathbb{N}$ mit $hy^{-1}y' = (y^{-1}y')^ih$. Wegen $h \in U$ ist dann $(y^{-1}y')^{i-1} \in U$. Aus $\mathrm{ggT}(|U|, |P|) = 1$ folgt $(y^{-1}y')^{i-1} = 1$, also ist $(y^{-1}y')^i = y^{-1}y'$. Da $hxh^{-1} \neq x$ für alle $1 \neq x \in P$ ist, ist $y^{-1}y' = 1$. Also ist $y = y'$.

(ii) Wegen $H \leq P({}^gU)$ erhält man nach dem Satz von Schur-Zassenhaus ein $t \in P$ mit $H \leq {}^{gt}U$. Wegen $C_G(P) \trianglelefteq G$ ist ${}^{t^{-1}g^{-1}}H \leq C_G(P) \cap U = C_U(P)$, also ist ${}^{g^{-1}}H \leq C_U(P)$. Damit ist ${}^{y^{-1}g^{-1}}H \leq C_U(P) \leq U$ für alle $y \in P$. □

Es sei G eine endliche Gruppe und p ein Primteiler von $|G|$. Die Gruppe G besitze genau eine Untergruppe P der Ordnung p. Für $p > 2$ sind die p-Sylowgruppen von G also zyklisch, und für $p = 2$ sind die p-Sylowgruppen von G zyklisch oder verallgemeinerte Quaternionengruppen (siehe [Hu], Kap. III, Satz 8.2). Wir werden im folgenden einen Automorphismus $\alpha \in \mathrm{Aut}(D_{\mathbb{Q}(\zeta)}(G))$ konstruieren, der $e_{(1,1)}^{D(G)}$ auf $e_{(P,1)}^{D(G)}$ abbildet, und für den $\alpha_{|D(G)}$ ein Automorphismus von $D(G)$ ist. Dabei ist $\zeta \in \mathbb{C}$ wieder eine primitive $|G|$-te Einheitswurzel. Wir definieren zunächst eine Abbildung

$$\beta : \mathcal{D}(G)/G \to \mathcal{D}(G)/G$$

folgendermaßen:

1. Für $[H, hH']_G \in \mathcal{D}(G)/G$ mit $p \nmid |H|$ setzen wir

$$\beta([H, hH']_G) := [PH, h(PH)']_G.$$

Wegen

$$\beta([{}^gH, {}^gh{}^gH']_G) = [P({}^gH), {}^gh(P({}^gH))']_G = [{}^g(PH), {}^g(h(PH)')]_G = [PH, h(PH)']_G$$

für alle $[H, hH']_G \in \mathcal{D}(G)/G$ mit $p \nmid |H|$ und alle $g \in G$ ist dies wohldefiniert.

2. Es sei $[H, hH']_G \in \mathcal{D}(G)/G$ mit $p \mid |H|$, $p^2 \nmid |H|$ und $p \nmid |\langle hH' \rangle|$. Nach dem Satz von Schur-Zassenhaus ist $H = PK$ mit einer p'-Untergruppe $K \leq H$. Dabei ist K bis auf Konjugation in H eindeutig bestimmt. Wegen $H/H' = PH'/H' \times KH'/H'$ existiert ein $k \in K$ mit $kH' = hH'$. Wir zeigen nun, dass kK' durch hH' eindeutig bestimmt ist. Es ist

$$H'P/P = (H/P)' = (KP/P)' = K'P/P,$$

und damit ist $H' \leq K'P$. Es folgt

$$H' \cap K \leq K \cap K'P = K'(K \cap P) = K' \leq H' \cap K,$$

also ist $K' = H' \cap K$. Aus $l \in K$ mit $lH' = kH' \in KH'/H'$ folgt also $k^{-1}l \in H' \cap K = K'$, und damit ist kK' durch hH' eindeutig bestimmt. Es sei nun $\tilde{K} \leq H$ eine weitere p'-Untergruppe mit $H = P\tilde{K}$. Dann existiert $g \in H$ mit ${}^gK = \tilde{K}$. Wegen ${}^gkH' = kH' = hH'$ ist ${}^gk\tilde{K}' \in \tilde{K}/\tilde{K}'$ das eindeutig bestimmte Element mit ${}^gkH' = hH'$. Wir setzen

$$\beta([H, hH']_G) := [K, kK']_G.$$

Nach den vorangegangenen Ausführungen ist dies wohldefiniert.

3. Für alle anderen Fälle sei $\beta([H, hH']_G) := [H, hH']_G$.

Für $[H, hH']_G \in \mathcal{D}(G)/G$ mit $p \nmid |H|$ ist

$$\beta^2([H, hH']_G) = \beta([PH, h(PH)']_G) = [H, hH']_G.$$

Für $[H, hH']_G \in \mathcal{D}(G)/G$ mit $p \mid |H|$, $p^2 \nmid |H|$ und $p \nmid |\langle hH' \rangle|$ existieren eine p'-Untergruppe $K \leq H$ und ein $k \in K$ mit $[H, hH']_G = [PK, k(PK)']_G$. Dann gilt

$$\beta^2([H, hH']_G) = \beta([K, kK']_G) = [PK, k(PK)']_G = [H, hH']_G.$$

Es folgt $\beta^2 = \mathrm{id}_{\mathcal{D}(G)/G}$, und damit ist β eine Bijektion. Also induziert β durch

$$\begin{array}{rcl} \alpha : D_{\mathbb{Q}(\zeta)}(G) & \to & D_{\mathbb{Q}(\zeta)}(G) \\ e^{D(G)}_{(H,hH')} & \mapsto & e^{D(G)}_{(U,uU')} \end{array}$$

mit $[U, uU']_G = \beta([H, hH']_G)$ einen Automorphismus α von $D_{\mathbb{Q}(\zeta)}(G)$.

Satz 2.10.2 *Die Abbildung $\alpha_{|D(G)} : D(G) \to D_{\mathbb{Q}(\zeta)}(G)$ ist ein Automorphismus von $D(G)$.*

Beweis: Es sei $(H, \varphi) \in \mathcal{M}(G)$ mit $P \not\leq H$, und es sei $\psi_\varphi \in \widehat{PH}$ definiert durch $\psi_\varphi(yh) := \varphi(h)$ für $y \in P$ und $h \in H$. Es sei $g \in G$. Dann ist ${}^g\psi_\varphi = \psi_{{}^g\varphi}$, und es folgt ${}^g(PH, \psi_\varphi) = (P({}^gH), \psi_{{}^g\varphi})$. Damit ist die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} D(G) & \to & D(G) \\ [U,\lambda]_G & \mapsto & \begin{cases} [PU, \psi_\lambda]_G & \text{falls } P \not\leq U \\ [U,\lambda]_G & \text{sonst} \end{cases} \end{array}$$

wohldefiniert. Weiterhin ist ${}^gC_H(P) = C_{{}^gH}(P)$. Es seien $1 = \mu_1, \mu_2, ..., \mu_p$ die linearen Charaktere von P. Dann ist $\{\mu_2, ..., \mu_p\} = \{{}^g\mu_2, ..., {}^g\mu_p\}$. Ferner sei $\mu_i\varphi_{|C_H(P)}$ der durch

$$\mu_i\varphi_{|C_H(P)}(y, u) := \mu_i(y)\varphi(u)$$

auf $PC_H(P) = P \times C_H(P)$ für $i = 1, ..., p$ definierte lineare Charakter. Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{p}[PC_H(P), \mu_i\varphi_{|C_H(P)}]_G &= \sum_{i=2}^{p}[{}^g(PC_H(P)), {}^g(\mu_i\varphi_{|C_H(P)})]_G \\ &= \sum_{i=2}^{p}[PC_{{}^gH}(P), \mu_i({}^g\varphi)_{|C_{{}^gH}(P)}]_G. \end{aligned}$$

Damit ist die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} D(G) & \to & D_{\mathbb{Q}(\zeta)}(G) \\ [U,\lambda]_G & \mapsto & \begin{cases} (U : C_U(P))^{-1} \sum_{i=2}^{p} \left[PC_U(P), \mu_i\lambda_{|C_U(P)}\right]_G & \text{falls } P \not\leq U \\ [U,\lambda]_G & \text{sonst} \end{cases} \end{array}$$

wohldefiniert. Ist $P = \langle x \rangle$, so ist μ_i für $i = 1, ..., p$ durch $\mu_i(x)$ eindeutig bestimmt. Außerdem ist $\mu_i(x)$ für $i \neq 1$ eine primitive p-te Einheitswurzel, was $\mu_i(x) \neq \mu_i(y)$ für $x \neq y \in P$ impliziert. Für $i \in \{2, ..., p\}$ und $h \in H$ gilt damit

$${}^h\mu_i = \mu_i \Leftrightarrow \mu_i(h^{-1}xh) = \mu_i(x) \Leftrightarrow h^{-1}xh = x \Leftrightarrow h \in C_H(P).$$

Also erzeugt die Operation von H auf $\{\mu_2, ..., \mu_p\}$ Bahnen der Länge $(H : C_H(P))$. Es seien $\tau_1, ..., \tau_l \in \hat{P}$, $l \in \mathbb{N}$, Repräsentanten dieser Bahnen. Wegen ${}^h(PC_H(P)) = PC_H(P)$ und ${}^h(\varphi_{|C_H(P)}) = \varphi_{|C_H(P)}$ für $h \in H$ ist damit

$$\frac{1}{(H : C_H(P))}\sum_{i=2}^{p}[PC_H(P), \mu_i\varphi_{|C_H(P)}]_G = \sum_{i=1}^{l}[PC_H(P), \tau_i\varphi_{|C_H(P)}]_G \in D(G).$$

Wir erhalten durch

$$\begin{array}{ccl} \gamma : D(G) & \to & D(G) \\ [U,\lambda]_G & \mapsto & [U,\lambda]_G \text{ für } P \leq U \\ [U,\lambda]_G & \mapsto & [PU, \psi_\lambda]_G - [U,\lambda]_G + \dfrac{1}{(U : C_U(P))}\displaystyle\sum_{i=2}^{p}\left[PC_U(P), \mu_i\lambda_{|C_U(P)}\right]_G \text{ für } P \not\leq U \end{array}$$

eine wohldefinierte Abbildung. Wir zeigen nun, dass die Abbildungen α und γ übereinstimmen. Dazu wird gezeigt, dass

$$s^{D(G)}_{(H,hH')}(\alpha([U,\lambda]_G)) = s^{D(G)}_{(H,hH')}(\gamma([U,\lambda]_G)) \tag{2.44}$$

für alle $[U,\lambda]_G \in \mathcal{M}(G)/G$ und alle $(H,hH') \in \mathcal{D}(G)$ ist.
Es sei $[U,\lambda]_G \in \mathcal{M}(G)/G$. Es ist $[U,\lambda]_G = \sum_{[V,vV']_G \in \mathcal{D}(G)/G} s^{D(G)}_{(V,vV')}([U,\lambda]_G) e^{D(G)}_{(V,vV')}$, und damit ist

$$\alpha([U,\lambda]_G) = \sum_{[V,vV']_G \in \mathcal{D}(G)/G} s^{D(G)}_{(V,vV')}([U,\lambda]_G)\alpha(e^{D(G)}_{(V,vV')}). \tag{2.45}$$

Es sei $(H,hH') \in \mathcal{D}(G)$. Um Behauptung (2.44) zu zeigen, nehmen wir zunächst an, dass $P \leq U$ ist. Dann ist $s^{D(G)}_{(H,hH')}(\gamma([U,\lambda]_G)) = s^{D(G)}_{(H,hH')}([U,\lambda]_G)$. Wir unterscheiden nun folgende Fälle:

(a) Es sei $p^2 \mid |H|$ oder $p^2 \nmid |H|$, $p \mid |\langle hH' \rangle|$.

Dann ist $\alpha(e^{D(G)}_{(H,hH')}) = e^{D(G)}_{(H,hH')}$. Wendet man $s^{D(G)}_{(H,hH')}$ auf Gleichung (2.45) an, so folgt

$$\begin{aligned} s^{D(G)}_{(H,hH')}(\alpha([U,\lambda]_G)) &= s^{D(G)}_{(H,hH')}\Big(\sum_{[V,vV']_G \in \mathcal{D}(G)/G} s^{D(G)}_{(V,vV')}([U,\lambda]_G)\alpha(e^{D(G)}_{(V,vV')})\Big) \\ &= s^{D(G)}_{(H,hH')}([U,\lambda]_G) = s^{D(G)}_{(H,hH')}(\gamma([U,\lambda]_G)). \end{aligned}$$

(b) Es sei $p \mid |H|$, $p^2 \nmid |H|$ und $p \nmid |\langle hH' \rangle|$.

Mit den Bezeichnungen aus Teil 2 der Definition von β ist $\alpha(e^{D(G)}_{(H,hH')}) = e^{D(G)}_{(K,kK')}$, und wegen $\alpha^2 = \mathrm{id}_{D_{\mathbb{Q}(\zeta)}(G)}$ folgt $e^{D(G)}_{(H,hH')} = \alpha(e^{D(G)}_{(K,kK')})$. Wegen $P \leq U$ gilt $K \leq {}^gU \Leftrightarrow H = PK \leq {}^gU$ für alle $g \in G$. Ist also $K \leq {}^gU$ für ein $g \in G$, so folgt aus $hH' = kH'$ wegen $H \leq {}^gU$ unmittelbar ${}^g\lambda(k) = {}^g\lambda(h)$. Durch Anwendung von $s^{D(G)}_{(H,hH')}$ auf Gleichung (2.45) erhalten wir

$$\begin{aligned} s^{D(G)}_{(H,hH')}(\alpha([U,\lambda]_G)) &= s^{D(G)}_{(H,hH')}\Big(\sum_{[V,vV']_G \in \mathcal{D}(G)/G} s^{D(G)}_{(V,vV')}([U,\lambda]_G)\alpha(e^{D(G)}_{(V,vV')})\Big) \\ &= s^{D(G)}_{(K,kK')}([U,\lambda]_G) = \sum_{\substack{gU \in G/U \\ K \leq {}^gU}} {}^g\lambda(k) = \sum_{\substack{gU \in G/U \\ PK \leq {}^gU}} {}^g\lambda(h) \\ &= s^{D(G)}_{(H,hH')}([U,\lambda]_G) = s^{D(G)}_{(H,hH')}(\gamma([U,\lambda]_G)). \end{aligned}$$

(c) Es sei $p \nmid |H|$.

Dann ist $\alpha(e^{D(G)}_{(PH,h(PH)')}) = e^{D(G)}_{(H,hH')}$. Wegen $P \leq U$ gilt $H \leq {}^gU \Leftrightarrow PH \leq {}^gU$ für alle $g \in G$. Es folgt

$$\begin{aligned} s^{D(G)}_{(H,hH')}(\alpha([U,\lambda]_G)) &= s^{D(G)}_{(H,hH')}\Big(\sum_{[V,vV']_G \in \mathcal{D}(G)/G} s^{D(G)}_{(V,vV')}([U,\lambda]_G)\alpha(e^{D(G)}_{(V,vV')})\Big) \\ &= s^{D(G)}_{(PH,h(PH)')}([U,\lambda]_G) = \sum_{\substack{gU \in G/U \\ PH \leq {}^gU}} {}^g\lambda(h) = \sum_{\substack{gU \in G/U \\ H \leq {}^gU}} {}^g\lambda(h) \\ &= s^{D(G)}_{(H,hH')}([U,\lambda]_G) = s^{D(G)}_{(H,hH')}(\gamma([U,\lambda]_G)). \end{aligned}$$

Es sei nun $P \nleq U$. Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

(d) Es sei $p^2 \mid |H|$.

Dann ist $\alpha(e^{D(G)}_{(H,hH')}) = e^{D(G)}_{(H,hH')}$, und wegen $p \nmid |U|$ folgt

$$\begin{aligned} s^{D(G)}_{(H,hH')}(\alpha([U,\lambda]_G)) &= s^{D(G)}_{(H,hH')}(\sum_{[V,vV']_G \in \mathcal{D}(G)/G} s^{D(G)}_{(V,vV')}([U,\lambda]_G)\alpha(e^{D(G)}_{(V,vV')})) \\ &= s^{D(G)}_{(H,hH')}([U,\lambda]_G) = 0. \end{aligned}$$

Wegen $p \nmid |U|$ folgt außerdem

$$\begin{aligned} s^{D(G)}_{(H,hH')}(\gamma([U,\lambda]_G)) =& s^{D(G)}_{(H,hH')}([PU,\psi_\lambda]_G) - s^{D(G)}_{(H,hH')}([U,\lambda]_G) \\ &+ \frac{1}{(U:C_U(P))}\sum_{i=2}^{p} s^{D(G)}_{(H,hH')}([PC_U(P),\mu_i\lambda_{|C_U(P)}]_G) = 0 \\ =& s^{D(G)}_{(H,hH')}(\alpha([U,\lambda]_G)). \end{aligned}$$

(e) Es seien $p \mid |H|$, $p^2 \nmid |H|$ und $p \nmid |\langle hH' \rangle|$.

Mit den Bezeichnungen aus Teil 2 der Definition von β sei $(H,hH') = (PK,k(PK)')$. Dann ist $\alpha(e^{D(G)}_{(H,hH')}) = e^{D(G)}_{(K,kK')}$, und wie in Fall (b) erhalten wir

$$s^{D(G)}_{(H,hH')}(\alpha([U,\lambda]_G)) = s^{D(G)}_{(K,kK')}([U,\lambda]_G). \tag{2.46}$$

Wegen $P \not\leq U$ ist $s^{D(G)}_{(H,hH')}([U,\lambda]_G) = 0$. Also ist

$$s^{D(G)}_{(H,hH')}(\gamma([U,\lambda]_G)) = s^{D(G)}_{(H,hH')}([PU,\psi_\lambda]_G) + \frac{1}{(U:C_U(P))}\sum_{i=2}^{p}[PC_U(P),\mu_i\lambda_{|C_U(P)}]_G). \tag{2.47}$$

(e1) Es sei $K \not\leq_G U$.

Dann ist $s^{D(G)}_{(K,kK')}([U,\lambda]_G) = 0$. Insbesondere ist $PK \not\leq_G PU$, denn aus $PK \leq_G PU$ würde aus dem Satz von Schur-Zassenhaus $K \leq_G U$ folgen. Also ist

$$s^{D(G)}_{(PK,k(PK)')}([PU,\psi_\lambda]_G) = 0 = s^{D(G)}_{(PK,k(PK)')}([PC_U(P),\mu_i\lambda_{|C_U(P)}]_G)$$

für alle $i = 2,...,p$. Also ist

$$s^{D(G)}_{(H,hH')}(\gamma([U,\lambda]_G)) = 0 = s^{D(G)}_{(K,kK')}([U,\lambda]_G) = s^{D(G)}_{(H,hH')}(\alpha([U,\lambda]_G)).$$

Die beiden folgenden Fälle beziehen sich auf die Situation $K \leq_G U$. Wir werden hierbei die repräsentative Untergruppe U der Bahn $[U,\lambda]_G$ so wählen, dass $K \leq U$ ist. Wir unterscheiden die Fälle $K \not\leq C_U(P)$ und $K \leq C_U(P)$. Es soll angemerkt werden, dass im Fall $K \leq U$ genau dann $K \leq C_U(P)$ ist, wenn $K \leq_G C_U(P)$ ist.

(e2) Es sei $K \leq U$ mit $K \not\leq C_U(P)$.

Es sei $g_1, ..., g_n$ ein Repräsentantensystem der Linksnebenklassen von PU in G, und es sei

$$\{g_1, ..., g_m\} = \{g_i : K \leq {}^{g_i}(PU), i = 1, ..., n\}.$$

Es sei $P = \langle x \rangle$. Wegen $P \nleq U$ ist $1, x, ..., x^{p-1}$ ein Repräsentantensystem der Linksnebenklassen von U in PU. Dann ist $g_i x^j$, $i = 1, ..., n$, $j = 0, ..., p-1$, ein Repräsentantensystem der Linksnebenklassen von U in G. Nach Lemma 2.10.1 (i) existiert zu jedem $i \in \{1, ..., m\}$ genau ein $j(i) \in \{0, ..., p-1\}$ mit $K \leq {}^{g_i x^{j(i)}}U$. Weiterhin sei $y_i \in P$ für $i \in \{1, ..., m\}$ durch $y_i k = x^{j(i)} k x^{-j(i)}$ definiert. Dann ist

$$\begin{aligned} s^{D(G)}_{(PK,k(PK)')}([PU, \psi_\lambda]_G) &= \sum_{\substack{gPU \in G/PU \\ PK \leq {}^g(PU)}} {}^g\psi_\lambda(k) = \sum_{\substack{gPU \in G/PU \\ K \leq {}^g(PU)}} {}^g\psi_\lambda(k) = \sum_{i=1}^m {}^{g_i}\psi_\lambda(k) \\ &= \sum_{i=1}^m {}^{g_i x^{j(i)}}\psi_\lambda(x^{j(i)} k x^{-j(i)}) = \sum_{i=1}^m \psi_{{}^{g_i x^{j(i)}}\lambda}(y_i k) \\ &= \sum_{i=1}^m {}^{g_i x^{j(i)}}\lambda(k). \end{aligned}$$

Ist nun $K \leq {}^{g_i x^s}U$ für $i \in \{1, ..., n\}$ und $s \in \{0, ..., p-1\}$, so ist $H \leq {}^{g_i}(PU)$, und nach Lemma 2.10.1 (i) folgt $s = j(i)$. Also ist

$$s^{D(G)}_{(PK,k(PK)')}([PU, \psi_\lambda]_G) = \sum_{i=1}^m {}^{g_i x^{j(i)}}\lambda(k) = \sum_{\substack{gU \in G/U \\ K \leq {}^gU}} {}^g\lambda(k) = s^{D(G)}_{(K,kK')}([U, \lambda]_G). \tag{2.48}$$

Wegen $K \nleq_G PC_U(P)$ ist $s^{D(G)}_{(PK,k(PK)')}([PC_U(P), \mu_i \lambda_{|C_U(P)}]_G) = 0$ für alle $i = 2, ..., p$. Mit den Gleichungen (2.46), (2.47) und (2.48) erhalten wir

$$s^{D(G)}_{(H,hH')}(\gamma([U, \lambda]_G)) = s^{D(G)}_{(K,kK')}([U, \lambda]_G) = s^{D(G)}_{(H,hH')}(\alpha([U, \lambda]_G)).$$

(e3) Es sei $K \leq C_U(P)$.

Mit den Bezeichnungen aus Fall (e2) und mit Lemma 2.10.1 (ii) ist

$$\begin{aligned} s^{D(G)}_{(PK,k(PK)')}([PU, \psi_\lambda]_G) &= \sum_{\substack{gPU \in G/PU \\ PK \leq {}^g(PU)}} {}^g\psi_\lambda(k) = \sum_{i=1}^m {}^{g_i}\psi_\lambda(k) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{p-1} {}^{g_i x^j}\psi_\lambda(k) \\ &= \frac{1}{p} \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{p-1} {}^{g_i x^j}\lambda(k) = \frac{1}{p} \sum_{\substack{gU \in G/U \\ K \leq {}^gU}} {}^g\lambda(k) = \frac{1}{p} s^{D(G)}_{(K,kK')}([U, \lambda]_G). \end{aligned} \tag{2.49}$$

Es ist $PK = P \times K$ und ${}^g(PC_U(P)) = P \times {}^gC_U(P)$ für alle $g \in G$. Für $g \in G$ ist also genau dann $PK \leq {}^g(PC_U(P))$, wenn $K \leq {}^gC_U(P)$ ist. Es folgt

$$\begin{aligned} s^{D(G)}_{(PK,k(PK)')}([PC_U(P), \mu_i \lambda_{|C_U(P)}]_G) &= \sum_{\substack{gPC_U(P) \in G/PC_U(P) \\ PK \leq {}^g(PC_U(P))}} {}^g(\mu_i \lambda_{|C_U(P)})(k) \\ &= \sum_{\substack{gPC_U(P) \in G/PC_U(P) \\ K \leq {}^gC_U(P)}} {}^g\lambda(k) \end{aligned} \tag{2.50}$$

für $i \in \{1, ..., p\}$. Es sei $u_1, ..., u_s \in U$ ein Vertretersystem der Linksnebenklassen von $C_U(P)$ in U. Dann ist $u_1, ..., u_s$ auch ein Vertretersystem der Linksnebenklassen von $PC_U(P)$ in PU. Ferner sind $g_i u_j$, $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., s$, Repräsentanten für die Linksnebenklassen von $PC_U(P)$ in G. Nun ist $C_U(P) \trianglelefteq PU$, also ist ${}^{g_i u_j}C_U(P) = {}^{g_i}C_U(P)$ und ${}^{g_i x^l}C_U(P) = {}^{g_i}C_U(P)$ für $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., s$ und $l = 0, ..., p-1$. Insbesondere ist ${}^{g_i}C_U(P)$ für $i \in \{1, ..., n\}$ unabhängig von der Wahl des Nebenklassenvertreters g_i. Es sei o.B.d.A. $\{g_1, ..., g_r\} = \{g_i : K \leq {}^{g_i}C_U(P), i = 1, ..., n\}$. Es folgt

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{gPC_U(P) \in G/PC_U(P) \\ K \leq {}^gC_U(P)}} {}^g\lambda(k) &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} {}^{g_i u_j}\lambda(k) = s\sum_{i=1}^{r} {}^{g_i}\lambda(k) = \frac{s}{p}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{p-1} {}^{g_i x^j}\lambda(k) \\ &= \frac{s}{p}\sum_{\substack{gU \in G/U \\ K \leq {}^gC_U(P)}} {}^g\lambda(k) = \frac{s}{p}\sum_{\substack{gU \in G/U \\ K \leq {}^gU}} {}^g\lambda(k) = \frac{(U : C_U(P))}{p} s^{D(G)}_{(K,kK')}([U, \lambda]_G).\end{aligned} \tag{2.51}$$

Bei der Umformung im vorletzten Schritt wird die Äquivalenz

$$K \leq {}^gU \Leftrightarrow K \leq C_{{}^gU}(P) \Leftrightarrow K \leq {}^gC_U(P)$$

benutzt. Mit den Gleichungen (2.49), (2.50) und (2.51) erhalten wir

$$\begin{aligned}s^{D(G)}_{(H,hH')}(\gamma([U, \lambda]_G)) &= s^{D(G)}_{(H,hH')}([PU, \psi_\lambda]_G) + \frac{1}{(U : C_U(P))} s^{D(G)}_{(H,hH')}(\sum_{i=2}^{p}[PC_U(P), \mu_i \lambda_{|C_U(P)}]_G) \\ &= s^{D(G)}_{(K,kK')}(\frac{1}{p}[U, \lambda]_G + \frac{p-1}{p}[U, \lambda]_G) = s^{D(G)}_{(K,kK')}([U, \lambda]_G) \\ &= s^{D(G)}_{(H,hH')}(\alpha([U, \lambda]_G)).\end{aligned}$$

Es soll noch festgehalten werden, dass wir sowohl in Fall (e2), als auch in Fall (e3) die Gleichung

$$s^{D(G)}_{(H,hH')}(\gamma([U, \lambda]_G)) = s^{D(G)}_{(K,kK')}([U, \lambda]_G) \tag{2.52}$$

erhalten.

(f) Es sei $p^2 \nmid |H|$ und $p \mid |\langle hH' \rangle|$.

Dann ist $\alpha(e^{D(G)}_{(H,hH')}) = e^{D(G)}_{(H,hH')}$. Wendet man $s^{D(G)}_{(H,hH')}$ auf Gleichung (2.45) an, so folgt wegen $P \nleq U$ und $P \leq H$

$$s^{D(G)}_{(H,hH')}(\alpha([U, \lambda]_G)) = s^{D(G)}_{(H,hH')}([U, \lambda]_G) = 0.$$

Es sei wieder $H = PK$ mit einer p'-Untergruppe $K \leq H$. Ist $K \nleq_G U$, so folgt unmittelbar

$$s^{D(G)}_{(PK,h(PK)')}(\gamma([U, \lambda]_G)) = 0 = s^{D(G)}_{(H,hH')}(\alpha([U, \lambda]_G)).$$

Wir nehmen nun $K \leq U$ an. Wegen $(H : K) = p$ ist $N_H(K) \in \{K, H\}$. Angenommen, es ist $N_H(K) = K$. Ist $1 \neq y \in P$, so existieren $u \in K$ und $i \in \{2, ..., p-1\}$ mit $uyu^{-1} = y^i$. Es folgt $1 \neq y^{i-1} \in H'$ und damit $P \leq H'$. Dann ist p kein Teiler von $(H : H')$, was der Annahme

$p \mid |\langle hH' \rangle|$ widerspricht. Also ist $K \trianglelefteq H$, und damit ist $PK = P \times K$. Dann ist $K \le C_U(P)$. Wir benutzen wieder die Bezeichnungen aus Fall (e2). Ist $K \le {}^{g_i}(PU)$, $i \in \{1, ..., m\}$, so folgt aus Lemma 2.10.1 (ii), dass $K \le {}^{g_i x^j}U$ für alle $j = 0, ..., p-1$ ist. Ist umgekehrt $K \le {}^{g_i x^j}U$ für ein $i \in \{1, ..., n\}$ und ein $j \in \{0, ..., p-1\}$, so ist $K \le {}^{yg_i}U$ mit einem $y \in P$, und wegen $K \le C_U(P)$ folgt $K = {}^{y^{-1}}K \le {}^{y^{-1}}(P({}^{yg_i}U)) = {}^{g_i}(PU)$. Also ist

$$s^{D(G)}_{(PK,h(PK)')}([PU, \psi_\lambda]_G) = \sum_{\substack{gPU \in G/PU \\ K \le {}^g(PU)}} {}^g\psi_\lambda(h) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{p-1} {}^{g_i x^j}\psi_\lambda(h) = \frac{1}{p} \sum_{\substack{gU \in G/U \\ K \le {}^gU}} {}^g\lambda(h_{p'}). \tag{2.53}$$

Für $g \in G$ ist genau dann $K \le {}^gC_U(P)$, wenn $PK \le {}^g(PC_U(P))$ ist. Es folgt

$$\begin{aligned} s^{D(G)}_{(PK,h(PK)')}([PC_U(P), \mu_i\lambda_{|C_U(P)}]_G) &= \sum_{\substack{gPC_U(P) \in G/PC_U(P) \\ PK \le {}^g(PC_U(P))}} {}^g(\mu_i\lambda_{|C_U(P)})(h) \\ &= \sum_{\substack{gPC_U(P) \in G/PC_U(P) \\ K \le {}^gC_U(P)}} {}^g(\mu_i\lambda_{|C_U(P)})(h). \end{aligned} \tag{2.54}$$

Wie in Fall (e3) seien $u_1, ..., u_s$ ein Vertretersystem der Linksnebenklassen von $C_U(P)$ in U und $\{g_1, ..., g_r\} = \{g_i : K \le {}^{g_i}C_U(P),\ i = 1, ..., n\}$, wobei $g_1, ..., g_n$ ein Vertretersystem der Linksnebenklassen von PU in G ist. Dann ist

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{gPC_U(P) \in G/PC_U(P) \\ K \le {}^gC_U(P)}} {}^g(\mu_i\lambda_{|C_U(P)})(h) = \sum_{j=1}^{r} \sum_{v=1}^{s} {}^{g_j u_v}(\mu_i\lambda_{|C_U(P)})(h) \\ &= \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{r} \sum_{v=1}^{s} \sum_{w=0}^{p-1} ({}^{g_j u_v x^w}\mu_i(h_p))({}^{g_j}\lambda(h_{p'})) = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{r} \sum_{v=1}^{s} \sum_{w=0}^{p-1} ({}^{g_j x^w u_v}\mu_i(h_p))({}^{g_j}\lambda(h_{p'})) \\ &= \frac{1}{p} \sum_{\substack{gU \in G/U \\ K \le {}^gC_U(P)}} \sum_{v=1}^{s} ({}^{g u_v}\mu_i(h_p))({}^g\lambda(h_{p'})) \end{aligned} \tag{2.55}$$

für alle $i = 2, ..., p$. Da $h_p \ne 1$ ist, ist $\sum_{i=2}^{p} \mu_i(h_p) = -1$. Mit den Gleichungen (2.54) und (2.55) erhalten wir nun

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(U : C_U(P))} \sum_{i=2}^{p} s^{D(G)}_{(PK,h(PK)')}([PC_U(P), \mu_i\lambda_{|C_U(P)}]_G) \\ &= \frac{1}{p(U : C_U(P))} \sum_{i=2}^{p} \sum_{\substack{gU \in G/U \\ K \le {}^gC_U(P)}} \sum_{v=1}^{s} ({}^{g u_v}\mu_i(h_p))({}^g\lambda(h_{p'})) \\ &\qquad = \frac{1}{p(U : C_U(P))} \sum_{\substack{gU \in G/U \\ K \le {}^gC_U(P)}} {}^g\lambda(h_{p'}) \sum_{v=1}^{s} (-1) = -\frac{1}{p} \sum_{\substack{gU \in G/U \\ K \le {}^gU}} {}^g\lambda(h_{p'}). \end{aligned} \tag{2.56}$$

Dabei wird im letzten Term wegen $K \leq {}^gU \Leftrightarrow K \leq {}^gC_U(P)$ über alle $gU \in G/U$ mit $K \leq {}^gU$ summiert. Aus den Gleichungen (2.53) und (2.56) ergibt sich

$$s^{D(G)}_{(PK,h(PK)')}([PU,\psi_\lambda]_G + \frac{1}{(U:C_U(P))}\sum_{i=2}^{p}[PC_U(P),\mu_i\lambda_{|C_U(P)}]_G) = 0,$$

und es folgt $s^{D(G)}_{(H,hH')}(\alpha([U,\lambda]_G)) = 0 = s^{D(G)}_{(H,hH')}(\gamma([U,\lambda]_G))$.

(g) Es sei $p \nmid |H|$.

Es ist $\alpha(e^{D(G)}_{(PH,h(PH)')}) = e^{D(G)}_{(H,hH')}$. Wendet man $s^{D(G)}_{(H,hH')}$ auf Gleichung (2.45) an, so folgt

$$s^{D(G)}_{(H,hH')}(\alpha([U,\lambda]_G)) = s^{D(G)}_{(PH,h(PH)')}([U,\lambda]_G) = 0.$$

Ist $H \not\leq_G U$, so ist

$$s^{D(G)}_{(H,hH')}([PU,\psi_\lambda]_G) = s^{D(G)}_{(H,hH')}([U,\lambda]_G) = s^{D(G)}_{(H,hH')}([PC_U(P),\mu_i\lambda_{|C_U(P)}]_G) = 0$$

für alle $i = 2,...,p$. In diesem Fall folgt also

$$s^{D(G)}_{(H,hH')}(\alpha([U,\lambda]_G)) = 0 = s^{D(G)}_{(H,hH')}(\gamma([U,\lambda]_G)).$$

Es sei $H \leq U$. Unter Berücksichtigung der Gleichungen (2.47) und (2.52) aus Fall (e) erhalten wir

$$\begin{aligned}s^{D(G)}_{(PH,h(PH)')}(\gamma([U,\lambda]_G)) &= s^{D(G)}_{(PH,h(PH)')}([PU,\psi_\lambda]_G + \frac{1}{(U:C_U(P))}\sum_{i=2}^{p}[PC_U(P),\mu_i\lambda_{|C_U(P)}]_G)\\ &= s^{D(G)}_{(H,hH')}([U,\lambda]_G).\end{aligned}$$

Wegen $H \leq {}^g(PU) \Leftrightarrow PH \leq {}^g(PU)$ für $g \in G$ ist

$$s^{D(G)}_{(PH,h(PH)')}([PU,\psi_\lambda]_G) = \sum_{\substack{gPU\in G/PU\\ PH\leq {}^g(PU)}} {}^g\psi_\lambda(h) = \sum_{\substack{gPU\in G/PU\\ H\leq {}^g(PU)}} {}^g\psi_\lambda(h) = s^{D(G)}_{(H,hH')}([PU,\psi_\lambda]_G),$$

und wegen $H \leq {}^g(PC_U(P)) \Leftrightarrow PH \leq {}^g(PC_U(P))$ für $g \in G$ erhalten wir analog

$$s^{D(G)}_{(PH,h(PH)')}([PC_U(P),\mu_i\lambda_{|C_U(P)}]_G) = s^{D(G)}_{(H,hH')}([PC_U(P),\mu_i\lambda_{|C_U(P)}]_G)$$

für alle $i = 2,...,p$. Es folgt

$$\begin{aligned}s^{D(G)}_{(H,hH')}(\gamma([U,\lambda]_G)) =& s^{D(G)}_{(H,hH')}([PU,\psi_\lambda]_G - [U,\lambda]_G + \frac{1}{(U:C_U(P))}\sum_{i=2}^{p}[PC_U(P),\mu_i\lambda_{|C_U(P)}]_G)\\ =& s^{D(G)}_{(PH,h(PH)')}([PU,\psi_\lambda]_G) + \frac{1}{(U:C_U(P))}\sum_{i=2}^{p}[PC_U(P),\mu_i\lambda_{|C_U(P)}]_G)\\ &- s^{D(G)}_{(H,hH')}([U,\lambda]_G)\\ =& s^{D(G)}_{(H,hH')}([U,\lambda]_G) - s^{D(G)}_{(H,hH')}([U,\lambda]_G) = 0.\end{aligned}$$

Also ist $s^{D(G)}_{(H,hH')}(\alpha([U,\lambda]_G)) = 0 = s^{D(G)}_{(H,hH')}(\gamma([U,\lambda]_G))$ für alle $(H,hH') \in \mathcal{D}(G)$ und alle $[U,\lambda]_G \in \mathcal{M}(G)/G$. Es folgt Behauptung (2.44) und damit $\alpha = \gamma$. $\square$

Korollar 2.10.3 *Es seien G eine endliche Gruppe und $U \trianglelefteq G$ eine normale, abelsche Hallgruppe mit quadratfreier Ordnung. Dann existiert ein Automorphismus $\alpha \in \mathrm{Aut}(D(G))$ mit $\alpha(e^{D(G)}_{(1,1)}) = e^{D(G)}_{(U,1)}$.*

Beweis: Es ist $|U| = p_1 \cdot ... \cdot p_n$ mit paarweise verschiedenen Primzahlen p_i $(i = 1, ..., n)$. Es seien $P_1, ..., P_n$ die jeweiligen p_i-Sylowgruppen von U. Dann ist $P_i \trianglelefteq G$ für alle $i = 1, ..., n$, und nach Satz 2.10.2 existieren Automorphismen $\alpha_1, ..., \alpha_n$ mit $\alpha_i(e^{D(G)}_{(1,1)}) = e^{D(G)}_{(P_i,1)}$ $(i = 1, ..., n)$. Wegen $\alpha_i(e^{D(G)}_{(H,hH')}) = e^{D(G)}_{(P_iH,h(P_iH)')}$ für alle $H \leq G$ mit $p_i \nmid |H|$ $(i \in \{1, ..., n\})$ ist dann $\alpha := \alpha_n \circ ... \circ \alpha_1 \in \mathrm{Aut}(D(G))$ mit $\alpha(e^{D(G)}_{(1,1)}) = e^{D(G)}_{(U,1)}$. $\square$

Kapitel 3

Der Trivial-Source-Ring

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Führerberechnung von primitiven Idempotenten des Trivial-Source-Ringes. Im vorherigen Kapitel haben wir gesehen, dass diese Invariante sehr wichtig bei der Betrachtung von Isomorphieproblemen sein kann. Ferner werden wir zeigen, dass für abelsche Gruppen G und $\tilde{G}$ mit isomorphen Trivial-Source-Ringen stets die Isomorphie $G \cong \tilde{G}$ folgt. Eine ausführliche Darstellung der grundlegenden Theorie ist in [CR] und [Be] zu finden.

3.1 Definitionen und Eigenschaften

Es seien G eine endliche Gruppe, p eine Primzahl, $(K, \mathcal{O}, F)$ ein passendes p-modulares System und $A(\mathcal{O}G)$ der Greenring von $\mathcal{O}G$. Ein $\mathcal{O}G$-Modul M heißt *Trivial-Source-$\mathcal{O}G$-Modul*, wenn jeder unzerlegbare direkte Summand von M den trivialen Modul als Quelle hat. Die von den Isomorphieklassen von Trivial-Source-$\mathcal{O}G$-Moduln erzeugte additive Untergruppe $T(\mathcal{O}G)$ von $A(\mathcal{O}G)$ ist bezüglich der Multiplikation abgeschlossen und enthält das Einselement. Also ist $T(\mathcal{O}G)$ ein Teilring von $A(\mathcal{O}G)$, der sogenannte *Trivial-Source-Ring* von $\mathcal{O}G$. Es gilt

$$T(\mathcal{O}G) = \bigoplus_{M \in \mathfrak{T}} \mathbb{Z}[M],$$

wobei $\mathfrak{T}$ ein Repräsentantensystem der Isomorphieklassen unzerlegbarer Trivial-Source-$\mathcal{O}G$-Moduln ist. Wegen

$$T(\mathcal{O}G) \cong T(FG)$$

(siehe [CR], Prop. 81.17) werden wir von Isomorphieklassen von Trivial-Source-FG-Moduln ausgehen und $T^p(G)$ anstatt $T(FG)$ schreiben.
Ist M ein unzerlegbarer Trivial-Source-FG-Modul mit Vertex $P \leq G$, so steht dieser in Green-Korrespondenz zu einem unzerlegbaren $FN_G(P)$-Modul N mit Vertex P und trivialer Quelle. Da P trivial auf N operiert, kann N als projektiver unzerlegbarer $F[N_G(P)/P]$-Modul angesehen werden. Ist umgekehrt N ein projektiver unzerlegbarer $F[N_G(P)/P]$-Modul für eine p-Untergruppe $P \leq G$, so steht $\inf_P^{N_G(P)} N$ in Green-Korrespondenz zu einem unzerlegbaren FG-Modul mit Vertex P und trivialer Quelle. Damit stehen die Isomorphieklassen der unzerlegbaren Trivial-Source-FG-Moduln mit Vertex P in 1-1-Korrespondenz zu den Isomorphieklassen der unzerlegbaren projektiven $F[N_G(P)/P]$-Moduln. Insbesondere hat $T^p(G)$ eine endliche $\mathbb{Z}$-Basis. Die obigen Ausführungen können in [CR] und [Be] nachgelesen werden.

Für einen kommutativen Ring R mit Einselement und $H \leq G$ setzen wir

$$T_R^p(H) := R \otimes_{\mathbb{Z}} T^p(H).$$

Es seien $U \leq H \leq G$ und $g \in G$. Die *Konjugationsabbildung* $c_{g,H}$ ist definiert durch

$$\begin{array}{rcl} c_{g,H} : T_R^p(H) & \to & T_R^p({}^gH) \\ [M] & \mapsto & [{}^gM] \end{array}$$

und ist ein R-Algebra-Homomorphismus. Ein weiterer R-Algebra-Homomorphismus ist gegeben durch die *Restriktionsabbildung*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{res}_U^H : T_R^p(H) & \mapsto & T_R^p(U) \\ [M] & \mapsto & \left[\mathrm{res}_U^H M\right]. \end{array}$$

Die *Induktionsabbildung* ist definiert durch

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{ind}_U^H : T_R^p(U) & \to & T_R^p(H) \\ [M] & \mapsto & \left[\mathrm{ind}_U^H M\right] \end{array}$$

und ist ein R-Modul-Homomorphismus. Mit diesen drei Operationen wird T_R^p zu einem R-Green-Funktor auf G (siehe [Bo98]).
Setzen wir voraus, dass G eine p-Gruppe oder eine p'-Gruppe ist, so zeigen die beiden folgenden Sätze, dass der Trivial-Source-Ring $T^p(G)$ isomorph zu uns wohlbekannten Ringen ist.

Satz 3.1.1 *Es sei G eine p-Gruppe. Dann ist $T^p(G) \cong B(G)$.*

Beweis: Es sei M ein unzerlegbarer Trivial-Source-FG-Modul mit Vertex $H \leq G$. Dann ist $M \mid \mathrm{ind}_H^G F_H$. Nach Green's Unzerlegbarkeitskriterium ist $\mathrm{ind}_H^G F_H$ unzerlegbar, also ist $[M] = [\mathrm{ind}_H^G F_H]$. Umgekehrt ist $\mathrm{ind}_H^G F_H$ für alle $H \leq G$ ein unzerlegbarer Trivial-Source-FG-Modul mit Vertex H. Damit ist

$$\mathcal{U} := \{[\mathrm{ind}_H^G F_H] \ : \ H \leq G\}$$

eine $\mathbb{Z}$-Basis von $T^p(G)$. Es seien $H, U \leq G$ mit $[\mathrm{ind}_H^G F_H] = [\mathrm{ind}_U^G F_U]$. Dann ist

$$H =_G \mathrm{vtx}(\mathrm{ind}_H^G F_H) =_G \mathrm{vtx}(\mathrm{ind}_U^G F_U) =_G U.$$

Ist umgekehrt $U = {}^gH$ für ein $g \in G$, so ist

$$[\mathrm{ind}_H^G F_H] = c_{g,G}([\mathrm{ind}_H^G F_H]) = [\mathrm{ind}_{{}^gH}^G {}^g(F_H)] = [\mathrm{ind}_U^G F_U].$$

Also ist genau dann $[\mathrm{ind}_H^G F_H] = [\mathrm{ind}_U^G F_U]$, wenn $H =_G U$ ist. Damit ist die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \alpha : \mathcal{U} & \to & \mathcal{B}(G) \\ \left[\mathrm{ind}_H^G F_H\right] & \mapsto & [G/H] \end{array}$$

eine wohldefinierte Bijektion. Setzt man α linear fort zu einer Abbildung $T^p(G) \to B(G)$, so erhält man zunächst einen $\mathbb{Z}$-Modul-Isomorphismus. Aus der Mackey-Tensorprodukt-Formel folgt für $H, U \leq G$

$$\begin{aligned} \alpha([\mathrm{ind}_H^G F_H][\mathrm{ind}_U^G F_U]) = \alpha(\sum_{HgU \in H\backslash G/U} [\mathrm{ind}_{{}^gH \cap U}^G F_{{}^gH \cap U}]) &= \sum_{HgU \in H\backslash G/U} [G/{}^gH \cap U] \\ &= [G/H][G/U] = \alpha([\mathrm{ind}_H^G F_H])\alpha([\mathrm{ind}_U^G F_U]). \end{aligned}$$

Also ist α ein Ring-Isomorphismus. $\square$

Satz 3.1.2 *Es sei G eine p'-Gruppe. Dann ist $T^p(G) \cong R(G)$.*

Beweis: Offensichtlich sind die unzerlegbaren Trivial-Source-FG-Moduln genau die einfachen FG-Moduln. Damit folgt die Behauptung. □

Aus den obigen beiden Sätzen erhält man unmittelbar Beispiele für Gruppen G und $\tilde{G}$ mit $T^p(G) \cong T^p(\tilde{G})$ und $G \ncong \tilde{G}$. In Bemerkung 2.9.9 ist für den Fall $p = 3$ ein solches Paar gegeben. Im Fall $p \neq 2$ bilden die Diedergruppe und die Quaternionengruppe mit 8 Elementen ein weiteres Paar mit dieser Eigenschaft.

3.2 Spezies und Idempotente

Es seien G eine endliche Gruppe, p eine Primzahl und $(K, \mathcal{O}, F)$ ein passendes p-modulares System. Es sei q eine Primzahl. Mit $O_q(G)$ bezeichnen wir die größte normale q-Untergruppe von G. Die Gruppe G heißt *q-hypoelementar*, wenn $G/O_q(G)$ zyklisch ist. Gegebenenfalls ist $O_q(G)$ die q-Sylowgruppe von G. Ist G q-hypoelementar und $H \leq G$, so ist $H' \leq G'$ eine q-Gruppe. Also ist die q-Sylowgruppe Q von H normal in H. Ferner folgt aus dem Satz von Schur-Zassenhaus, dass H/Q isomorph zu einer Untergruppe von $G/O_q(G)$ ist. Also ist H/Q zyklisch, und damit ist H q-hypoelementar.

Bemerkung 3.2.1 Es seien $H \leq G$ eine p-hypoelementare Gruppe und $P := O_p(H)$. Da P normal in H ist, operiert P trivial auf $\mathrm{ind}_P^H F_P$. Wir können $\mathrm{ind}_P^H F_P$ deshalb als $F[H/P]$-Modul betrachten. Nach dem Satz von Maschke ist

$$\mathrm{ind}_P^H F_P \simeq F[H/P] \simeq \bigoplus_{\psi \in \widehat{H/P}} F_\psi$$

als $F[H/P]$-Modul. Dabei ist die Operation von H/P auf F_ψ mit $\psi \in \widehat{H/P}$ definiert durch $hP * c := \mu(\psi(hP)) \cdot c$ $(hP \in H/P,\ c \in F)$, wobei $\mu : \mathcal{O} \to F$ die Restklassenabbildung ist. Wir erhalten durch

$$\begin{array}{ccc} \hat{H}_{p'} & \to & \widehat{H/P} \\ \varphi & \mapsto & \bar{\varphi} \end{array}$$

mit $\bar{\varphi}(hP) := \varphi(h)$ für $hP \in H/P$ einen Gruppenisomorphismus. Setzt man $F_\varphi := \mathrm{inf}_P^H F_{\bar{\varphi}}$, so ist

$$\mathrm{ind}_P^H F_P \simeq \bigoplus_{\varphi \in \hat{H}_{p'}} F_\varphi$$

als FH-Modul. Ein FH-Modul M ist also genau dann ein unzerlegbarer Trivial-Source-FH-Modul mit Vertex P, wenn $M \simeq F_\varphi$ für ein $\varphi \in \hat{H}_{p'}$ ist.

Wir setzen

$$\mathcal{T}^p(G) := \{(H, hO_p(H)) : H \leq G,\ hO_p(H) \in H/O_p(H),\ \langle hO_p(H)\rangle = H/O_p(H)\}$$

und definieren durch

$${}^g(H, hO_p(H)) := ({}^gH, {}^gh^g(O_p(H))),$$

$(H, hO_p(H)) \in \mathcal{T}^p(G)$, $g \in G$, eine Operation von G auf $\mathcal{T}^p(G)$. Die G-Bahn von $(H, hO_p(H) \in \mathcal{T}^p(G)$ wird mit $[H, hO_p(H)]_G$ bezeichnet. Weiterhin setzen wir

$$\mathcal{T}^p(G)/G := \{[H, hO_p(H)]_G \ : \ (H, hO_p(H)) \in \mathcal{T}^p(G)\}.$$

Für eine p-hypoelementare Gruppe $H \leq G$ mit p-Sylowgruppe P sei $T_1^p(H)$ die additive Untergruppe von $T^p(H)$, die durch die Isomorphieklassen der unzerlegbaren Trivial-Source-FH-Moduln mit Vertex P erzeugt wird und

$$\tau_H : T^p(H) \to T_1^p(H)$$

die entspechende Projektion. Mit Bemerkung 3.2.1 sieht man leicht, dass $T_1^p(H)$ ein unitärer Teilring von $T^p(H)$ ist und τ_H damit zu einem Ring-Homomorphismus wird. Ist $R^p(H)$ der Brauercharakterring von H, so ist die Abbildung

$$\gamma_H : T_1^p(H) \to R^p(H),$$

die der Isomorphieklasse eines unzerlegbaren Trivial-Source-FH-Moduls M mit Vertex P den Brauercharakter von M zuordnet, ein Ringhomomorphismus. Definiert man weiterhin für $h \in H$ die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} t_{H,h} : R^p(H) & \to & \mathcal{O} \\ \chi & \mapsto & \chi(h), \end{array}$$

so erhält man ebenfalls einen Ringhomomorphismus. Die Spezies von $T^p(G)$ sind nun gegeben durch

$$s^{T^p(G)}_{(H,hO_p(H))} := t_{H,h} \circ \gamma_H \circ \tau_H \circ \mathrm{res}^G_H : T^p(G) \to T^p(H) \to T_1^p(H) \to R^p(H) \to \mathcal{O}$$

für $(H, hO_p(H)) \in \mathcal{T}^p(G)$ (siehe [Bo01], 2.7). Sind $(H, hO_p(H)), (U, uO_p(U)) \in \mathcal{T}^p(G)$, so ist genau dann $s^{T^p(G)}_{(H,hO_p(H))} = s^{T^p(G)}_{(U,uO_p(U))}$, wenn $(H, hO_p(H))$ und $(U, uO_p(U))$ in G konjugiert sind.

Ist $\zeta \in \mathbb{C}$ eine primitive $|G|_{p'}$-te Einheitswurzel und $m := |\mathcal{T}^p(G)/G|$, so ist $T^p_{\mathbb{Q}(\zeta)}(G)$ halbeinfach, und es gilt

$$T^p_{\mathbb{Q}(\zeta)}(G) \cong \mathbb{Q}(\zeta)^m$$

(siehe [De97], Satz 5.4). Ferner ist durch

$$s^{T^p(G)} := \prod_{[H,hO_p(H)]_G \in \mathcal{T}^p(G)/G} s^{T^p(G)}_{(H,hO_p(G))} : T^p(G) \to \mathbb{Z}[\zeta]^m$$

ein Monomorphismus definiert. Die *Speziestafel* von $T^p(G)$ ist die $m \times m$-Matrix mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}[\zeta]$, deren Spalten aus den Bildern $s^{T^p(G)}([M])$ der verschiedenen Isomorphieklassen unzerlegbarer Trivial-Source-FG-Moduln $[M]$ besteht.

Um die primitiven Idempotente von $T^p_{\mathbb{Q}(\zeta)}(G)$ zu bestimmen, werden wir die folgenden Abbildungen betrachten. Durch

$$\begin{array}{rcl} \beta : D(G) & \to & T^p(G) \\ {[H, \varphi]_G} & \mapsto & [\mathrm{ind}^G_H F_{\varphi_{p'}}] \end{array}$$

ist ein Epimorphismus von Ringen definiert. Weiterhin erhält man durch

$$\begin{aligned} \beta^* : \mathcal{T}^p(G) &\to \mathcal{D}(G) \\ (H, hO_p(H)) &\mapsto (H, h_{p'}H') \end{aligned}$$

eine injektive Abbildung von $\mathcal{T}^p(G)$ nach $\mathcal{D}(G)$. Die primitiven Idempotente von $T^p_{\mathbb{Q}(\zeta)}(G)$ sind dann gegeben durch

$$e^{T^p(G)}_{(H,hO_p(H))} = \beta(e^{D(G)}_{\beta^*(H,hO_p(H))}). \tag{3.1}$$

Die obigen Ausführungen können in [Bo01] nachgelesen werden. Beachtet man, dass für $H \leq G$, $h \in H$ und $\varphi \in \hat{H}$ stets $\varphi_{p'}(h_p) = 1 = \varphi_p(h_{p'})$ gilt, so erhält man für $e^{T^p(G)}_{(H,hO_p(H))}$, $(H, hO_p(H)) \in \mathcal{T}^p(G)$, die explizite Formel

$$\begin{aligned} e^{T^p(G)}_{(H,hO_p(H))} = \beta(e^{D(G)}_{(H,h_{p'}H')}) &= \frac{|H'|}{|N_G(H, h_{p'}H')||H|} \sum_{L \leq H} |L|\mu(L,H) \sum_{\varphi \in \hat{H}} \varphi(h_{p'}^{-1})[\mathrm{ind}_L^G F_{(\varphi_{|L})_{p'}}] \\ &= \frac{|H'|}{|N_G(H, h_{p'}H')||H|} \sum_{L \leq H} |L|\mu(L,H) \sum_{\varphi \in \hat{H}} \varphi_{p'}(h_{p'}^{-1})\varphi_p(h_{p'}^{-1})[\mathrm{ind}_L^G F_{\varphi_{p'}|L}] \\ &= \frac{|H'|}{|N_G(H, h_{p'}H')||H|} \sum_{L \leq H} |L|\mu(L,H)|\hat{H}|_p \sum_{\varphi \in \hat{H}_{p'}} \varphi(h_{p'}^{-1})[\mathrm{ind}_L^G F_{\varphi|L}] \\ &= \frac{|H'|_{p'}}{|N_G(H, h_{p'}H')||H|_{p'}} \sum_{L \leq H} |L|\mu(L,H)| \sum_{\varphi \in \hat{H}_{p'}} \varphi(h^{-1})[\mathrm{ind}_L^G F_{\varphi|L}]. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Bemerkung 3.2.2 Es seien $(H, hO_p(H)) \in \mathcal{T}^p(G)$ mit $h_{p'} \neq 1$, $P := O_p(H)$ und $L < H$ mit $(H : L)_{p'} \neq 1$. Dann ist $LP < H$, und wegen $\langle hP \rangle = H/P$ ist $h \notin L$. Es ist $\hat{H}_{p'} \cong \widehat{H/P}$, und für $\varphi, \psi \in \hat{H}_{p'}$ ist genau dann $\psi_{|L} = \varphi_{|L}$, wenn $\psi_{|LP} = \varphi_{|LP}$ ist. Ferner gibt es zu $\varphi \in \hat{H}_{p'}$ genau $(H : LP)$ lineare Charaktere $\psi \in \hat{H}_{p'}$ mit $\psi_{|L} = \varphi_{|L}$. Wir wählen $\tau_1, ..., \tau_k \in \hat{H}_{p'}$, $k = (LP : P)$, mit

$$\{\tau_{1|L}, ..., \tau_{k|L}\} = \{\varphi_{|L} : \varphi \in \hat{H}_{p'}\}$$

und definieren $\bar{\tau}_i \in \widehat{H/P}$ durch $\bar{\tau}_i(gP) := \tau_i(g)$ für $i = 1, ..., k$ und $g \in H$. Aus Bemerkung 1.1.3 (ii) folgt

$$\begin{aligned} \sum_{\varphi \in \hat{H}_{p'}} \varphi(h^{-1})[\mathrm{ind}_L^G F_{\varphi|L}] &= \sum_{i=1}^k [\mathrm{ind}_L^G F_{\tau_i|L}] \sum_{\substack{\varphi \in \hat{H}_{p'} \\ \varphi_{|LP} = \tau_{i|LP}}} \varphi(h^{-1}) \\ &= \sum_{i=1}^k [\mathrm{ind}_L^G F_{\tau_i|L}] \sum_{\substack{\varphi \in \widehat{H/P} \\ \varphi_{|LP/P} = \bar{\tau}_{i|LP/P}}} \varphi(h^{-1}P) = 0. \end{aligned}$$

Also müssen in der expliziten Idempotentformel

$$e^{T^p(G)}_{(H,hO_p(H))} = \frac{|H'|_{p'}}{|N_G(H, h_{p'}H')||H|_{p'}} \sum_{L \leq H} |L|\mu(L,H) \sum_{\varphi \in \hat{H}_{p'}} \varphi(h^{-1})[\mathrm{ind}_L^G F_{\varphi|L}]$$

die Summanden zu den Untergruppen $L \leq H$ mit $(H:L)_{p'} \neq 1$ nicht berücksichtigt werden. Umgekehrt folgt aus

$$\sum_{\varphi \in \hat{H}_{p'}} \varphi(h^{-1})[\mathrm{ind}_L^G F_{\varphi|L}] = 0,$$

dass $(H:L)_{p'} \neq 1$ ist. Dies werden wir unter anderem in Satz 3.3.4 beweisen.

Bemerkung 3.2.3 Es seien H eine p-hypoelementare Gruppe, $P := O_p(H)$ und $L \leq H$ mit $(H:L)_{p'} = 1$. Dann ist $|H|_{p'} = |L|_{p'}$, und damit ist $LP = H$. Also ist genau dann $\varphi_{|L} = \lambda_{|L}$ für $\varphi, \lambda \in \hat{H}_{p'}$, wenn $\varphi = \lambda$ ist. Wegen $|\hat{L}_{p'}| = |L|_{p'} = |H|_{p'} = |\hat{H}_{p'}|$ folgt damit

$$\{\lambda_{|L} \ : \ \lambda \in \hat{H}_{p'}\} = \{\psi \ : \ \psi \in \hat{L}_{p'}\}.$$

Beispiel 3.2.4 Es sei

$$G := \langle a, b \ : \ a^6 = 1 = b^2, \ b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$$

die Diedergruppe mit 12 Elementen. Die Konjugationsklassen von G sind gegeben durch

$$C_1 = \{1\}, \ C_2 = \{a, a^5\}, \ C_3 = \{a^2, a^4\}, \ C_4 = \{a^3\}, \ C_5 = \{b, a^2b, a^4b\}, \ C_6 = \{ab, a^3b, a^5b\}.$$

Es seien $\chi_1, ..., \chi_6$ die gewöhnlichen irreduziblen Charaktere von G. Tabelle 3.1 zeigt die Charaktertafel von G. Es seien Z_i, $i = 1, ..., 6$, einfache $\mathbb{C}G$-Moduln, die zu χ_i, $i = 1, ..., 6$,

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	-1	1	-1
χ_4	1	-1	1	-1	-1	1
χ_5	2	1	-1	-2	0	0
χ_6	2	-1	-1	2	0	0

Tabelle 3.1: Die Charaktertafel von G

korrespondieren. Es sei $p = 3$ und $(K, \mathcal{O}, F)$ ein passendes 3-modulares System. Dann gibt es vier 3-reguläre Konjugationsklassen, nämlich C_1, C_4, C_5 und C_6, und vier Isomorphieklassen einfacher FG-Moduln, die hier von $F_1, ..., F_4$ repräsentiert werden. Tabelle 3.2 zeigt die entsprechende Zerlegungsmatrix. Die Einträge in der Zerlegungsmatrix lassen sich unschwer nachrechnen, wenn man die Einträge der Charaktertafel durch deren Restklassen modulo 3 ersetzt. Es seien M_1, M_2, M_3 und M_4 projektive, unzerlegbare FG-Moduln, die jeweils zu den einfachen FG-Moduln F_1, F_2, F_3 und F_4 korrespondieren. Tabelle 3.3 zeigt die entsprechende Cartanmatrix. Wir berechnen nun die kanonische Basis des Trivial-Source-Ringes $T^p(G)$. Die Isomorphieklassen der unzerlegbaren Trivial-Source-FG-Moduln mit Vertex 1 sind genau die Isomorphieklassen der projektiven, unzerlegbaren FG-Moduln M_1, M_2, M_3 und M_4. Ist P die 3-Sylowgruppe von G, so ist $|P| = 3$. Ferner ist P normal in G, und G/P ist isomorph zur Kleinschen Vierergruppe. Es seien φ_1, φ_2, φ_3 und φ_4 die irreduziblen Brauercharaktere

	$[F_1]$	$[F_2]$	$[F_3]$	$[F_4]$
$[Z_1]$	1	0	0	0
$[Z_2]$	0	1	0	0
$[Z_6]$	1	1	0	0
$[Z_3]$	0	0	1	0
$[Z_4]$	0	0	0	1
$[Z_5]$	0	0	1	1

Tabelle 3.2: Die Zerlegungsmatrix von G mit $p = 3$

	$[F_1]$	$[F_2]$	$[F_3]$	$[F_4]$
$[M_1]$	2	1	0	0
$[M_2]$	1	2	0	0
$[M_3]$	0	0	2	1
$[M_4]$	0	0	1	2

Tabelle 3.3: Die Cartanmatrix von G mit $p = 3$

von G/P. Dann repräsentieren F_{φ_1}, F_{φ_2}, F_{φ_3} und F_{φ_4} die einfachen $F[G/P]$-Moduln. Die unzerlegbaren Trivial-Source-FG-Moduln mit Vertex P sind alle isomorph zu einem direkten Summanden von $\mathrm{ind}_P^G F_P$. Da P normal in G ist, ist

$$\mathrm{ind}_P^G F_P \simeq \bigoplus_{i=1}^{4} F_{\varphi_i}$$

als $F[G/P]$-Modul. Für $i = 1, ..., 4$ repräsentieren also $\mathrm{inf}_P^G F_{\varphi_i}$ die unzerlegbaren Trivial-Source-FG-Moduln mit Vertex P. Insbesondere gilt $F_i \simeq \mathrm{inf}_P^G F_{\varphi_i}$, wenn wir

$$\varphi_1 := 1, \quad \varphi_2(x) := \begin{cases} 1 & x = a^3P \\ -1 & x = bP \\ -1 & x = abP \end{cases}, \quad \varphi_3(x) := \begin{cases} -1 & x = a^3P \\ 1 & x = bP \\ -1 & x = abP \end{cases}, \quad \varphi_4(x) := \begin{cases} -1 & x = a^3P \\ -1 & x = bP \\ 1 & x = abP \end{cases}$$

setzen. Dies ist aus der Charaktertafel und der Zerlegungsmatrix von G ersichtlich. Ein Vertretersystem der 3-hypoelementaren Untergruppen von G ist gegeben durch

$$H_1 := 1, \quad H_2 := \langle a^3 \rangle, \quad H_3 := \langle b \rangle, \quad H_4 := \langle ab \rangle,$$
$$H_5 := P, \quad H_6 := \langle P, a^3 \rangle, \quad H_7 := \langle P, b \rangle, \quad H_8 := \langle P, ab \rangle.$$

Tabelle 3.4 zeigt die Speziestafel von $T^p(G)$. Die einzelnen Einträge berechnen sich durch die Konstruktionsvorschrift der Spezies und durch Verwendung der Cartanmatrix.
Der Speziestafel ist unter anderem zu entnehmen, dass der Trivial-Source-Ring $T^p(G)$ außer den trivialen Einheiten $[F_i]$, $i = 1, ..., 4$, weitere Torsionseinheiten beinhaltet. Beispielsweise ist durch $[F_1] - [M_1] + [M_2]$ eine solche Torsionseinheit gegeben.

	$[M_1]$	$[M_2]$	$[M_3]$	$[M_4]$	$[F_1]$	$[F_2]$	$[F_3]$	$[F_4]$
$s^{T^p(G)}_{(1,1)}$	3	3	3	3	1	1	1	1
$s^{T^p(G)}_{(H_2,a^3)}$	3	3	-3	-3	1	1	-1	-1
$s^{T^p(G)}_{(H_3,b)}$	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
$s^{T^p(G)}_{(H_4,ab)}$	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
$s^{T^p(G)}_{(H_5,1P)}$	0	0	0	0	1	1	1	1
$s^{T^p(G)}_{(H_6,a^3P)}$	0	0	0	0	1	1	-1	-1
$s^{T^p(G)}_{(H_7,bP)}$	0	0	0	0	1	-1	1	-1
$s^{T^p(G)}_{(H_8,abP)}$	0	0	0	0	1	-1	-1	1

Tabelle 3.4: Die Speziestafel von $T^p(G)$.

3.3 Die Führer der primitiven Idempotente

Es seien G eine endliche Gruppe, p eine Primzahl, $\zeta \in \mathbb{C}$ eine primitive $|G|_{p'}$-te Einheitswurzel und $(K, \mathcal{O}, F)$ ein passendes p-modulares System. Für einen FG-Modul M bezeichnen wir mit $\mathrm{soc}(M)$ den Sockel und mit $\mathrm{hd}(M)$ den Kopf von M.

Satz 3.3.1 (Scott-Alperin) *Es seien $H \leq G$ und P eine p-Sylowgruppe von H.*

(i) Es existiert ein unzerlegbarer direkter Summand S von $\mathrm{ind}_H^G F_H$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $F_G \mid \mathrm{soc}(S)$.

(b) $F_G \mid \mathrm{hd}(S)$.

(c) $\mathrm{vtx}(S) =_G P$. Ist $\tilde{S}$ ein $FN_G(P)$-Modul, der zu S in Green-Korrespondenz steht, so kann $\tilde{S}$ als $F[N_G(P)/P]$-Modul betrachtet werden. Dabei ist $\tilde{S}$ eine projektive Decke von $F_{N_G(P)/P}$.

(ii) In jeder Zerlegung von $\mathrm{ind}_H^G F_H$ in unzerlegbare direkte Summanden existiert ein eindeutig bestimmter unzerlegbarer direkter Summand S, der die Bedingungen (a), (b) und (c) erfüllt.

Beweis: [Na], 4.8, Thm. 8.4.

Der Modul S aus obigem Satz heißt *Scott-Modul* und ist bis auf Isomorphie eindeutig durch G und H bestimmt. Wir werden diesen Modul künftig mit $S(G, H)$ bezeichnen.

Satz 3.3.2 *(i) Es seien $H, \tilde{H} \leq G$ und $P \leq H$, $\tilde{P} \leq \tilde{H}$ jeweilige p-Sylowgruppen von H und $\tilde{H}$. Genau dann ist $S(G, H) \simeq S(G, \tilde{H})$, wenn P und $\tilde{P}$ in G konjugiert sind. Insbesondere ist $S(G, H) \simeq S(G, P)$.*

(ii) Es sei $P \leq H \leq G$ mit einer p-Untergruppe P, und es sei W ein unzerlegbarer Trivial-Source-FH-Modul. Ist $S(G,P) \mid \mathrm{ind}_H^G W$, so ist $W \simeq S(H, {}^gP)$ für ein $g \in G$.

Beweis: [Na], 4.8, Cor. 8.5 und Thm. 8.7.

Für die Berechnung der Führer der primitiven Idempotente von $T^p_{\mathbb{Q}(\zeta)}(G)$ werden wir folgende Konsequenzen aus den obigen Sätzen benötigen:

Satz 3.3.3 *Es seien $H \leq G$ und $Q \leq H$ eine p-Sylowgruppe von H. Es sei $P \leq G$ eine p-Untergruppe. Genau dann ist $S(G,P) \mid \mathrm{ind}_H^G F_H$, wenn P und Q in G konjugiert sind.*

Beweis: Wir nehmen zunächst $P =_G Q$ an. Nach Satz 3.3.2 (i) ist

$$S(G,P) \simeq S(G,Q) \simeq S(G,H).$$

Wegen $S(G,H) \mid \mathrm{ind}_H^G F_H$ folgt damit $S(G,P) \mid \mathrm{ind}_H^G F_H$.
Es sei umgekehrt $S(G,P) \mid \mathrm{ind}_H^G F_H$. Dann ist $P =_G \mathrm{vtx}(S(G,P)) \leq_G H$. Demnach existiert ein $g \in G$ mit ${}^gP \leq Q$. Also ist

$$S(G, {}^gP) \simeq S(G,P) \mid \mathrm{ind}_H^G F_H$$

mit ${}^gP \leq H$, und nach Satz 3.3.2 (ii) ist $F_H \simeq S(H, {}^uP)$ für ein $u \in G$. Nach Satz 3.3.1 (i) ist $\mathrm{vtx}(S(H, {}^uP)) =_G P$, und wegen $\mathrm{vtx}(F_H) =_H Q$ folgt $P =_G Q$. □

Es seien M ein unzerlegbarer Trivial-Source-FG-Modul und $X \in T^p_{\mathbb{Q}(\zeta)}(G)$. Ist $[M_1], ..., [M_m]$, $m \in \mathbb{N}$, die kanonische Basis von $T^p(G)$, so existieren eindeutig bestimmte $a_1, ..., a_m \in \mathbb{Q}(\zeta)$ mit

$$X = a_1[M_1] + ... + a_m[M_m].$$

Insbesondere ist $[M] = [M_i]$ für genau ein $i \in \{1, ..., m\}$. Wir setzen

$$s(X, [M]) := a_i$$

und schreiben

$$[M] \mid X,$$

falls $s(X,[M]) \neq 0$ ist. Für $X_1, X_2 \in T^p_{\mathbb{Q}(\zeta)}(G)$ und $b_1, b_2 \in \mathbb{Q}(\zeta)$ gilt offensichtlich

$$s(b_1X_1 + b_2X_2, [M]) = b_1 s(X_1, [M]) + b_2 s(X_2, [M]).$$

Ist $X \in T^p(G)$, so ist $s(X,[M]) \in \mathbb{Z}$. Ferner ist $s([N],[M]) \in \mathbb{N}_0$ für jeden Trivial-Source-FG-Modul N.

Satz 3.3.4 *Es seien $(H, hO_p(H)) \in \mathcal{T}^p(G)$, $L \leq H$, $V \leq L$ die p-Sylowgruppe von L und $Q \leq G$ eine p-Untergruppe. Genau dann ist*

$$[S(G,Q)] \mid \sum_{\varphi \in \hat{H}_{p'}} \varphi(h^{-1})[\mathrm{ind}_L^G F_{\varphi|L}] =: X, \tag{3.3}$$

wenn $Q =_G V$ und $(H:L)_{p'} = 1$ ist. Gegebenenfalls ist

$$[S(G,Q)] \mid [\mathrm{ind}_L^G F_L] \quad \text{und} \quad s(X, [S(G,Q)]) = 1.$$

Beweis: Wir merken zunächst an, dass nach dem Satz von Maschke $\mathrm{ind}_V^L F_V \simeq \bigoplus_{\psi\in\hat{L}_{p'}} F_\psi$ ist. Damit ist $[\mathrm{ind}_V^L F_V] = \sum_{\psi\in\hat{L}_{p'}} [F_\psi]$, was

$$[\mathrm{ind}_V^G F_V] = \sum_{\psi\in\hat{L}_{p'}} [\mathrm{ind}_L^G F_\psi] \tag{3.4}$$

impliziert. Es gelte nun Bedingung (3.3). Dann ist $X \neq 0$, und aus Bemerkung 3.2.2 folgt unmittelbar $(H:L)_{p'} = 1$. Wegen Bedingung (3.3) ist $[S(G,Q)] \mid [\mathrm{ind}_L^G F_{\lambda|L}]$ für ein $\lambda \in \hat{H}_{p'}$. Da $F_{\varphi|L} = F_{\varphi_{|L}}$ für alle $\varphi \in \hat{H}_{p'}$ ist, folgt aus Bemerkung 3.2.3, dass $[S(G,Q)] \mid [\mathrm{ind}_L^G F_\tau]$ für ein $\tau \in \hat{L}_{p'}$ ist. Wegen Gleichung (3.4) ist dann $[S(G,Q)] \mid [\mathrm{ind}_V^G F_V]$. Aus Satz 3.3.3 folgt nun, dass Q und V in G konjugiert sind.
Es gelte umgekehrt $Q =_G V$ und $(H:L)_{p'} = 1$. Nach Satz 3.3.2 (i) ist

$$[S(G,Q)] = [S(G,V)] = [S(G,L)].$$

Insbesondere ist $[S(G,Q)] \mid [\mathrm{ind}_L^G F_L]$. Nach Satz 3.3.1 (ii) gilt $s([\mathrm{ind}_V^G F_V],[S(G,V)]) = 1$ und $s([\mathrm{ind}_L^G F_L],[S(G,L)]) = 1$. Also ist

$$s([\mathrm{ind}_V^G F_V],[S(G,Q)]) = 1 = s([\mathrm{ind}_L^G F_L],[S(G,Q)]). \tag{3.5}$$

Unter Berücksichtigung von Bemerkung 3.2.3 und Gleichung (3.4) ist

$$1 = s([\mathrm{ind}_V^G F_V],[S(G,Q)]) = s(\sum_{\psi\in\hat{L}_{p'}} [\mathrm{ind}_L^G F_\psi],[S(G,Q)]) = \sum_{\varphi\in\hat{H}_{p'}} s([\mathrm{ind}_L^G F_{\varphi|L}],[S(G,Q)]). \tag{3.6}$$

Wegen $s([\mathrm{ind}_L^G F_{\varphi|L}],[S(G,Q)]) \in \mathbb{N}_0$ für alle $\varphi \in \hat{H}_{p'}$ folgt aus den Gleichungen (3.5) und (3.6)

$$s([\mathrm{ind}_L^G F_{\varphi|L}],[S(G,Q)]) = 0$$

für alle $1 \neq \varphi \in \hat{H}_{p'}$. Also ist $s(X,[S(G,Q)]) = 1$. Insbesondere folgt die Gültigkeit von (3.3). Damit ist alles gezeigt. □

Korollar 3.3.5 *Es seien $(H, hO_p(H)) \in \mathcal{T}^p(G)$ und $Q \leq H$ eine p-Untergruppe mit $(H:Q)_p = p$. Es sei $\mathfrak{U} := \{U \ : \ U \leq H,\ (H:U) = p\}$, und es sei $L \leq H$ mit*

$$[S(G,Q)] \ \Big| \sum_{\varphi\in\hat{H}_{p'}} \varphi(h^{-1})[\mathrm{ind}_L^G F_{\varphi|L}].$$

Dann ist $L \in \mathfrak{U}$.

Beweis: Es sei $V \leq L$ die p-Sylowgruppe von L. Nach Satz 3.3.4 ist $V =_G Q$ und $(H:L)_{p'} = 1$. Wegen $p = (H:Q)_p = (H:L)_p$ folgt $(H:L) = (H:L)_p(H:L)_{p'} = p$. Also ist $L \in \mathfrak{U}$. □

Für eine Untergruppe $H \leq G$ bezeichnen wir mit $(H:H')_{p,0}$ den quadratfreien Anteil von $(H:H')_p$. Es ist also $(H:H')_{p,0} = p$, falls $p \mid (H:H')$ ist. Andernfalls ist $(H:H')_{p,0} = 1$.

Satz 3.3.6 *Es sei $(H, hO_p(H)) \in \mathcal{T}^p(G)$. Dann ist*

$$n = (N_G(H, h_{p'}H') : H)(H:H')_{p'}(H:H')_{p,0}$$

die kleinste natürliche Zahl mit $ne_{(H,hO_p(H))}^{\mathcal{T}^p(G)} \in T_{\mathbb{Z}[\zeta]}^p(G)$.

Beweis: Wir setzen $e := e^{T^p(G)}_{(H,hO_p(H))}$ und

$$X_L := \sum_{\varphi\in\hat{H}_{p'}} \varphi(h^{-1})[\mathrm{ind}_L^G F_{\varphi|L}] \in T^p_{\mathbb{Z}[\zeta]}(G)$$

für $L \leq H$. Wir zeigen zunächst, dass $ne \in T^p_{\mathbb{Z}[\zeta]}(G)$ ist. Angenommen, H ist eine p'-Gruppe. Dann ist $n = (N_G(H,hH') : H')$, und nach Satz 2.3.3 ist $ne^{D(G)}_{(H,hH')} \in D_{\mathbb{Z}[\zeta]}(G)$. Sind $\beta : D(G) \to T^p(G)$ und $\beta^* : \mathcal{T}^p(G) \to \mathcal{D}(G)$ die Abbildungen aus Abschnitt 3.2, so ist

$$ne = n\beta(e^{D(G)}_{(\beta^*(H,hO_p(H)))}) = \beta(ne^{D(G)}_{(H,hH')}) \in T^p_{\mathbb{Z}[\zeta]}(G).$$

Es sei also H keine p'-Gruppe. Es ist

$$\begin{aligned} ne &= \frac{(N_G(H,h_{p'}H') : H)(H : H')_{p'}(H : H')_{p,0}}{|N_G(H,h_{p'}H')|(H : H')_{p'}} \sum_{L\leq H} |L|\mu(L,H)X_L \\ &= \frac{(H : H')_{p,0}}{|H|} \sum_{L\leq H} |L|\mu(L,H)X_L. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Aus Satz 2.3.2 folgt, dass für $L \leq H$ stets $(N_H(L) : L)$ ein Teiler von $\mu(L,H)(H : LH')_0$ ist. Dabei ist $(H : LH')_0$ der quadratfreie Anteil von $(H : LH')$. Also existiert für $L \leq H$ ein $c_L \in \mathbb{Z}$ mit

$$\mu(L,H) = \frac{(N_H(L) : L)c_L}{(H : LH')_0}. \tag{3.8}$$

Es seien $L \leq H$, $\lambda \in \hat{H}_{p'}$ und $u \in H$. Wegen ${}^u(F_{\lambda|L}) = F_{\lambda|{}^uL}$ ist

$$[\mathrm{ind}_L^G F_{\lambda|L}] = c_{u,G}([\mathrm{ind}_L^G F_{\lambda|L}]) = [{}^u(\mathrm{ind}_L^G F_{\lambda|L})] = [\mathrm{ind}_{{}^uL}^G {}^u(F_{\lambda|L})] = [\mathrm{ind}_{{}^uL}^G F_{\lambda|{}^uL}].$$

Also ist

$$X_L = \sum_{\varphi\in\hat{H}_{p'}} \varphi(h^{-1})[\mathrm{ind}_L^G F_{\varphi|L}] = \sum_{\varphi\in\hat{H}_{p'}} \varphi(h^{-1})[\mathrm{ind}_{{}^uL}^G F_{\varphi|{}^uL}] = X_{{}^uL}. \tag{3.9}$$

Ferner ist $\mu(L,H) = \mu({}^uL,H)$. Es sei $\mathcal{C}(H)$ ein Repräsentantensystem der H-Konjugationsklassen der Untergruppen von H. Aus den Gleichungen (3.7), (3.8) und (3.9) erhalten wir

$$\begin{aligned} ne &= \frac{(H : H')_{p,0}}{|H|} \sum_{L\leq H} |L|\mu(L,H)X_L = \frac{(H : H')_{p,0}}{|H|} \sum_{L\in\mathcal{C}(H)} |L| \sum_{\substack{U\leq H\\ U=_H L}} \mu(U,H)X_U \\ &= \frac{(H : H')_{p,0}}{|H|} \sum_{L\in\mathcal{C}(H)} |L|\mu(L,H)(H : N_H(L))X_L \\ &= \frac{(H : H')_{p,0}}{|H|} \sum_{L\in\mathcal{C}(H)} \frac{|N_H(L)|(H : N_H(L))c_L}{(H : LH')_0} X_L = \sum_{L\in\mathcal{C}(H)} \frac{(H : H')_{p,0}}{(H : LH')_0} c_L X_L. \end{aligned}$$

In Bemerkung 3.2.2 wurde gezeigt, dass in der obigen Summation die Untergruppen $L \leq H$ mit $(H : L)_{p'} \neq 1$ nicht berücksichtigt werden müssen. Ist $L \leq H$ mit $(H : L)_{p'} = 1$, so ist auch $(H : LH')_{p'} = 1$. Es folgt $(H : LH')_0 = (H : LH')_{p,0}$, und damit ist $(H : LH')_0$ ein Teiler von $(H : H')_{p,0}$. Also ist

$$ne = \sum_{\substack{L \in \mathcal{C}(H) \\ (H:L)_{p'}=1}} \frac{(H : H')_{p,0}}{(H : LH')_0} c_L X_L \in T^p_{\mathbb{Z}[\zeta]}(G).$$

Wir zeigen nun, dass n die kleinste natürliche Zahl mit $ne \in T^p_{\mathbb{Z}[\zeta]}(G)$ ist. Hierzu zeigen wir zunächst, dass

$$s(e, [S(G, H)]) = \frac{|H'|_{p'}}{(N_G(H, h_{p'}H') : H)|H|_{p'}}$$

ist. Wir setzen $P := O_p(H)$. Ist $L < H$ mit $P \leq L$, so ist $h_{p'} \neq 1$ und $(H : L)_{p'} \neq 1$. Nach Bemerkung 3.2.2 ist

$$X_L = 0. \tag{3.10}$$

Es sei $L < H$ mit $P \nleq L$. Wegen $|L|_p < |P|$ folgt aus Satz 3.3.4

$$[S(G, H)] = [S(G, P)] \nmid X_L. \tag{3.11}$$

Aufgrund der Gleichungen (3.10) und (3.11) ist $s(\sum_{L<H} |L|\mu(L, H)X_L, [S(G, H)]) = 0$. Also ist

$$s(e, [S(G, H)]) = \frac{|H|_{p'}}{(N_G(H, h_{p'}H') : H)|H|_{p'}} s(X_H, [S(G, H)]),$$

und wegen $[S(G, H)] = [S(G, P)]$ folgt aus Satz 3.3.4

$$s(e, [S(G, H)]) = \frac{|H|_{p'}}{(N_G(H, h_{p'}H') : H)|H|_{p'}}. \tag{3.12}$$

Ist m der Führer von e, so folgt aus Gleichung (3.12)

$$\frac{m}{(N_G(H, h_{p'}H') : H)(H : H')_{p'}} [S(G, H)] \in T^p_{\mathbb{Z}[\zeta]}(G).$$

Also existiert ein $k \in \mathbb{Z}$ mit

$$m = k(N_G(H, h_{p'}H') : H)(H : H')_{p'}.$$

Ist p kein Teiler von $(H : H')$, so ist $m = k(N_G(H, h_{p'}H') : H')$. Ferner ist $n = (N_G(H, h_{p'}H') : H')$, und wegen $ne \in T^p_{\mathbb{Z}[\zeta]}(G)$ ist damit $m = n$.
Es sei $p \mid (H : H')$. Wir setzen $\mathfrak{U} := \{U \ : \ U \leq H, \ (H : U) = p\}$. Für $U \in \mathfrak{U}$ setzen wir $Q_U := O_p(U)$. Dann ist $(H : Q_U)_p = p$ für alle $U \in \mathfrak{U}$. Aus Korollar 3.3.5 folgt, dass

$$s(\sum_{\substack{L \leq H \\ L \notin \mathfrak{U}}} |L|\mu(L, H)X_L, [S(G, Q_U)]) = 0$$

für alle $U \in \mathfrak{U}$ ist. Also ist

$$s(e, [S(G, Q_U)]) = \frac{|H'|_{p'}}{|N_G(H, h_{p'}H')||H|_{p'}} s(\sum_{L \in \mathfrak{U}} |L|\mu(L, H)X_L, [S(G, Q_U)]) \tag{3.13}$$

für alle $U \in \mathfrak{U}$. Aus Satz 3.3.4 folgt für $L, U \in \mathfrak{U}$

$$s(X_L, [S(G, Q_U)]) \neq 0 \Leftrightarrow Q_L =_G Q_U. \tag{3.14}$$

Durch

$$L \sim \tilde{L} \;\Leftrightarrow\; Q_L =_G Q_{\tilde{L}}$$

mit $L, \tilde{L} \in \mathfrak{U}$ wird eine Äquivalenzrelation auf $\mathfrak{U}$ definiert. Es seien $\mathfrak{U}_1, ..., \mathfrak{U}_t$, $t \in \mathbb{N}$, die entsprechenden Äquivalenzklassen und $L_i \in \mathfrak{U}_i$, $i = 1, ..., t$, ein Vertretersystem dieser Klassen. Dann ist $\mu(L_i, H) = -1$ für alle $i = 1, ..., t$, und mit den Gleichungen (3.13) und (3.14) und Satz 3.3.4 erhalten wir

$$\begin{aligned} s(me, [S(G, Q_{L_i})]) &= \frac{m|H'|_{p'}}{|N_G(H, h_{p'}H')||H|_{p'}} s(\sum_{L \in \mathfrak{U}_i} |L|\mu(L, H) X_L, [S(G, Q_{L_i})]) \\ &= -\frac{k}{p} s(\sum_{L \in \mathfrak{U}_i} X_L, [S(G, Q_{L_i})]) = -\frac{k}{p} \sum_{L \in \mathfrak{U}_i} s(X_L, [S(G, Q_{L_i})]) = -\frac{k}{p} |\mathfrak{U}_i| \end{aligned}$$

für alle $i = 1, ..., t$. Also ist $p \mid k|\mathfrak{U}_i|$ für $i = 1, ..., t$, und es folgt

$$p \mid k(|\mathfrak{U}_1| + ... + |\mathfrak{U}_t|) = k|\mathfrak{U}|.$$

Nach Satz 2.3.11 ist $|\mathfrak{U}| \equiv 1 \pmod p$, also ist p ein Teiler von k. Damit ist

$$m = cp(N_G(H, h_{p'}H') : H)(H : H')_{p'}$$

für ein $c \in \mathbb{Z}$. Wegen $p = (H : H')_{p,0}$, $n = (N_G(H, h_{p'}H') : H)(H : H')_{p'}(H : H')_{p,0}$ und $ne \in T^p_{\mathbb{Z}[\zeta]}(G)$ folgt $m = n$. □

Satz 3.3.7 *Es seien G und $\tilde{G}$ endliche Gruppen mit $T^p(G) \cong T^p(\tilde{G})$. Dann ist $|G| = |\tilde{G}|$.*

Beweis: Da der Führer des primitiven Idempotentes $e^{T^p(G)}_{(1,1)}$ gleich $|G|$ ist, verläuft der Beweis analog zur Beweisführung von Satz 2.3.4. □

3.4 Abelsche Gruppen

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, dass die Isomorphie $T^p(G) \cong T^p(\tilde{G})$ mit endlichen abelschen Gruppen G und $\tilde{G}$ die Isomorphie $G \cong \tilde{G}$ impliziert. Es seien F ein algebraisch abgeschlossener Körper, G_1 und G_2 endliche Gruppen, M_1 ein FG_1-Modul und M_2 ein FG_2-Modul. Wir erhalten einen $F[G_1 \times G_2]$-Modul $M_1 \otimes_F M_2$ durch die Operation

$$(g_1, g_2) * (m_1 \otimes m_2) = g_1 \cdot m_1 \otimes g_2 \cdot m_2 \quad (g_1 \in G_1,\ g_2 \in G_2,\ m_1 \in M_1,\ m_2 \in M_2).$$

Es gilt der folgende Satz:

Satz 3.4.1 *(i) Ist M_i ein unzerlegbarer FG_i-Modul ($i = 1, 2$), so ist $M_1 \otimes_F M_2$ ein unzerlegbarer $F(G_1 \times G_2)$-Modul.*

(ii) Sind M_i, N_i unzerlegbare FG_i-Moduln ($i = 1, 2$) mit $M_1 \otimes_F M_2 \simeq N_1 \otimes_F N_2$, so ist $M_i \simeq N_i$ ($i = 1, 2$).

Beweis: [Hu2], Ch. VII, Thm. 9.15.

Es sei p eine Primzahl und F der Körper der Charakteristik p eines p-modularen Systems, das für die folgenden Betrachtungen stets als passend für die entsprechenden Gruppen vorausgesetzt wird.

Satz 3.4.2 *Es seien G und H endliche Gruppen mit* $\mathrm{ggT}(|G|,|H|) = 1$. *Dann ist*

$$T^p(G \times H) \cong T^p(G) \otimes_{\mathbb{Z}} T^p(H).$$

Beweis: Wegen $\mathrm{ggT}(|G|,|H|) = 1$ können wir annehmen, dass H eine p'-Gruppe ist. Es ist also $T^p(H) \cong R(H)$. Es seien M ein unzerlegbarer Trivial-Source-FG-Modul mit einem Vertex $P \leq G$ und N ein einfacher FH-Modul. Dann ist $M \mid \mathrm{ind}_P^G F_P$ und $N \mid FH$, und wegen

$$M \otimes_F N \mid \mathrm{ind}_P^G F_P \otimes_F FH \simeq \mathrm{ind}_{P\times 1}^{G\times H} F_{P\times 1}$$

ist $M \otimes_F N$ ein Trivial-Source-$F[G \times H]$-Modul.
Es seien $[M_1], ..., [M_m]$ und $[N_1], ..., [N_n]$ die kanonischen Basen von $T^p(G)$ und $T^p(H)$. Wir definieren eine Abbildung

$$\begin{aligned} f : \{[M_i] : i = 1, ..., m\} \times \{[N_j] : j = 1, ..., n\} &\rightarrow T^p(G \times H) \\ ([M_i], [N_j]) &\mapsto [M_i \otimes_F N_j] \end{aligned}$$

und setzen f durch die Vorschriften

$$f(x \pm x', y) := f(x, y) \pm f(x', y), \quad f(x, y \pm y') := f(x, y) \pm f(x, y')$$

für $x, x' \in T^p(G)$ und $y, y' \in T^p(H)$ zu einer Abbildung

$$f : T^p(G) \times T^p(H) \rightarrow T^p(G \times H)$$

fort. Dann ist $f([M], [N]) = [M \otimes_F N]$ für alle Trivial-Source-FG-Moduln M und alle FH-Moduln N. Wegen $f(zx, y) = f(x, zy)$ für $x \in T^p(G)$, $y \in T^p(H)$, $z \in \mathbb{Z}$, ist f eine ausgeglichene Abbildung. Dann existiert ein eindeutig bestimmter $\mathbb{Z}$-Homomorphismus

$$\varphi : T^p(G) \otimes_{\mathbb{Z}} T^p(H) \rightarrow T^p(G \times H)$$

mit $\varphi(x \otimes y) = f(x, y)$ für $x \in T^p(G)$ und $y \in T^p(H)$, und für unzerlegbare Trivial-Source-FG-Moduln M, M' und unzerlegbare Trivial-Source-FH-Moduln (also einfache FH-Moduln) N, N' gilt

$$\begin{aligned} \varphi(([M] \otimes_{\mathbb{Z}} [N])([M'] \otimes_{\mathbb{Z}} [N'])) &= \varphi([M \otimes_F M'] \otimes_{\mathbb{Z}} [N \otimes_F N']) = f([M \otimes_F M'], [N \otimes_F N']) \\ &= [M \otimes_F M' \otimes_F N \otimes_F N'] = [M \otimes_F N \otimes_F M' \otimes_F N'] \\ &= \varphi([M] \otimes_{\mathbb{Z}} [N])\varphi([M'] \otimes_{\mathbb{Z}} [N']). \end{aligned}$$

Also ist φ ein Ringhomomorphismus.
Wir zeigen nun, dass φ injektiv ist. Da $\{[M_i] \otimes_{\mathbb{Z}} [N_j] : i = 1, ..., m,\ j = 1, ..., n\}$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $T^p(G) \otimes_{\mathbb{Z}} T^p(H)$ ist, wählen wir $z_{ij} \in \mathbb{Z}$ $(i = 1, ..., m,\ j = 1, ..., n)$ mit

$$\varphi(\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} z_{ij}([M_i] \otimes_{\mathbb{Z}} [N_j])) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} z_{ij}[M_i \otimes_F N_j] = 0.$$

Nach Satz 3.4.1 (i) ist $M_i \otimes_F N_j$ ein unzerlegbarer Trivial-Source-$F[G_1 \times G_2]$-Modul für alle $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$. Aus Satz 3.4.1 (ii) folgt $[M_i \otimes_F N_j] \not\simeq [M_k \otimes_F N_l]$ für alle $i, k \in \{1, ..., m\}$, $j, l \in \{1, ..., n\}$ mit $(i, j) \neq (k, l)$. Also ist $z_{ij} = 0$ für alle $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$. Damit ist φ injektiv.
Wir zeigen nun, dass φ surjektiv ist. Es sei L ein unzerlegbarer Trivial-Source-$F[G \times H]$-Modul. Wegen $\mathrm{ggT}(|G|, |H|) = 1$ existiert eine p-Untergruppe $P \leq G$ mit

$$L \mid \mathrm{ind}_{P\times 1}^{G\times H} F_{P\times 1} \simeq \mathrm{ind}_P^G F_P \otimes_F FH.$$

Es existieren $a_i, b_j \in \mathbb{N}_0$ $(i = 1, ..., m,\ j = 1, ..., n)$ mit $[\mathrm{ind}_P^G F_P] = \sum_{i=1}^m a_i[M_i]$ und $[FH] = \sum_{j=1}^n b_j[N_j]$. Dann ist

$$L \mid \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j (M_i \otimes_F N_j).$$

Da L unzerlegbar ist, folgt aus dem Satz von Krull-Schmidt, dass $[L] = [M_k \otimes_F N_l]$ für ein $k \in \{1, ..., m\}$ und ein $l \in \{1, ..., n\}$ ist. Also ist φ surjektiv und damit ein Isomorphismus. □

Satz 3.4.3 *Es seien $G = P \times H$ und $\tilde{G} = \tilde{P} \times \tilde{H}$ Gruppen mit p-Gruppen P, $\tilde{P}$ und p'-Gruppen H, $\tilde{H}$. Genau dann ist $T^p(G) \cong T^p(\tilde{G})$, wenn $B(P) \cong B(\tilde{P})$ und $R(H) \cong R(\tilde{H})$ ist.*

Beweis: Nach Satz 3.1.1 und Satz 3.1.2 gilt $T^p(P) \cong B(P)$, $T^p(\tilde{P}) \cong B(\tilde{P})$, $T^p(H) \cong R(H)$ und $T^p(\tilde{H}) \cong R(\tilde{H})$. Ist nun $B(P) \cong B(\tilde{P})$ und $R(H) \cong R(\tilde{H})$, so folgt aus Satz 3.4.2

$$T^p(G) \cong B(P) \otimes_{\mathbb{Z}} R(H) \cong B(\tilde{P}) \otimes_{\mathbb{Z}} R(\tilde{H}) \cong T^p(\tilde{G}).$$

Es gelte umgekehrt $T^p(G) \cong T^p(\tilde{G})$. Es sei $\xi \in \mathbb{C}$ eine primitive $|H|$-te Einheitswurzel, $\mathfrak{p}$ ein Primideal in $\mathbb{Z}[\xi]$ mit $p = \mathrm{char}(\mathbb{Z}[\xi]/\mathfrak{p})$ und $S := \mathbb{Z}[\xi]_{\mathfrak{p}}$ die Lokalisierung von $\mathbb{Z}[\xi]$ bei $\mathfrak{p}$. Dann stimmen die primitiven Idempotente von $R_S(H)$ und $R_{\mathbb{Q}(\xi)}(G)$ sowie die primitiven Idempotente von $R_S(\tilde{H})$ und $R_{\mathbb{Q}(\xi)}(\tilde{H})$ überein (siehe [Ch07]). Also sind $R_S(H)$ und $R_S(\tilde{H})$ halbeinfach. Ist $\mathbb{Z}_{(p)}$ die Lokalisierung von $\mathbb{Z}$ beim Primideal $(p) \subseteq \mathbb{Z}$, so stimmen die primitiven Idempotente von $B_S(P)$ und die primitiven Idempotente von $B_{\mathbb{Z}_{(p)}}(P)$ überein, wie man leicht an der expliziten Formel für die primitiven Idempotente von $B_{\mathbb{Q}}(P)$ sieht. Da die primitiven Idempotente von $B_{\mathbb{Z}_{(p)}}(P)$ in 1-1-Korrespondenz zu den Konjugationsklassen p-perfekter Untergruppen von P stehen, besitzt $B_S(P)$ nur die Idempotente 0 und 1. Analog besitzt auch $B_S(\tilde{P})$ nur die Idempotente 0 und 1. Setzen wir $A_1 := B(P)$, $A_2 := B(\tilde{P})$, $B_1 := R(H)$, $B_2 := R(\tilde{H})$, so folgt aus Satz 2.8.4 $R(H) \cong R(\tilde{H})$.
Wir setzen nun $S := \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$. Dann stimmen die primitiven Idempotente von $B_S(P)$ und $B_{\mathbb{Q}}(P)$ sowie die primitiven Idempotente von $B_S(\tilde{P})$ und $B_{\mathbb{Q}}(\tilde{P})$ überein. Außerdem besitzen $R_S(H)$ und $R_S(\tilde{H})$ nur die trivialen Idempotente 0 und 1 (siehe [Ch07]). Mit $A_1 := R(H)$, $A_2 := R(\tilde{H})$, $B_1 := B(P)$, $B_2 := B(\tilde{P})$ folgt nun mit Satz 2.8.4 $B(P) \cong B(\tilde{P})$. □

Korollar 3.4.4 *Es seien $P, \tilde{P}$ p-Gruppen, $H, \tilde{H}$ p'-Gruppen, und es sei*

$$T^p(P \times H) \cong T^p(\tilde{P} \times \tilde{H}).$$

Dann gilt:

(i) Ist P abelsch, so ist $P \cong \tilde{P}$.

(ii) Ist H abelsch, so ist $H \cong \tilde{H}$.

Insbesondere gilt für endliche abelsche Gruppen G und $\tilde{G}$ mit $T^p(G) \cong T^p(\tilde{G})$ stets $G \cong \tilde{G}$.

Beweis: Aus Satz 3.4.3 folgt $B(P) \cong B(\tilde{P})$ und $R(H) \cong R(\tilde{H})$. Ist P abelsch, so folgt $P \cong \tilde{P}$ (siehe [Ra05]). Ist H abelsch, so folgt $H \cong \tilde{H}$ (siehe [Sa66]). $\square$

Literaturverzeichnis

[Ba04] L. Barker, *Fibred permutation sets and the idempotents and units of monomial Burnside rings*, J. Algebra **281** (2004), no.2, 535-566

[Be] D. Benson, *Modular representation theory: New trends and methods*, Springer-Verlag, 1984

[Bo90] R. Boltje, *A canonical Brauer induction formula*, Astérisque **181-182** (1990), 31-59

[Bo98] R. Boltje, *A general theory of canonical induction formulae*, J. Algebra **206** (1998), no. 1, 293-343

[Bo01] R. Boltje, *Representation rings of finite groups, their species and idempotent formulae*, to appear in J. Algebra

[Bo04] R. Boltje, *Integrality conditions for elements in ghost rings of generalized Burnside rings*, to appear in J. Algebra

[Br95] R. Brandl, T. Huckle, *On the isomorphism problem for Burnside rings*, Proc. Am. Math. Soc. **123** (1995), no. 12, 3623-3626

[Ch07] G. Chen, Y. Fan, *On the connected components of the spectrum of the extended character ring of a finite group*, J. Algebra **312** (2007), no. 2, 689-698

[CR] C. W. Curtis, I. Reiner, *Methods of Representation Theory*, Wiley-Interscience, 1981

[De97] M. Deiml, *Zur Darstellungstheorie von Darstellungsringen*, Dissertation, Jena 1997

[Dr71] A. Dress, *The ring of monomial representations. I. Structure theory*, J. Algebra **18** (1971), 137-157

[Fo04] B. Fotsing, *Zum Ring der monomialen Darstellungen*, Diplomarbeit, Jena 2004

[Fo05] B. Fotsing, B. Külshammer, *Modular species and prime ideals for the ring of monomial representations of a finite group*, Comm. Algebra **33** (2005), no. 10, 3667-3677

[Gl81] D. Gluck, *Idempotent formula for the Burnside algebra with applications to the p-subgroup simplicial complex*, Illinois J. Math. **25** (1981), no.1, 63-67

[Ha89] T.Hawkes, I. M. Isaacs, M. Özaydin, *On the Möbius function of a finite group*, Rocky Mountain J. Math. **19** (1989), no. 4, 1003-1034

[Hi40] G. Higman, *The units of group rings*, Proc. London Math. Soc. **46** (1940), 231-248

[Hu] B. Huppert, *Endliche Gruppen I*, Springer-Verlag, 1967

[Hu2] B. Huppert, N. Blackburn, *Finite groups II*, Springer-Verlag, 1982

[Ka] G. Karpilovsky, *Group representations 4*, Math. Studies, Vol. 182, North Holland, 1995

[Ki91] W. Kimmerle, *Beiträge zur ganzzahligen Darstellungstheorie endlicher Gruppen*, Bayreuther Mathematische Schriften **36** (1991)

[Ki95] W. Kimmerle, K. W. Roggenkamp, *Automorphisms of Burnside rings*, Groups'93 Galway/St. Andrews, Vol. 2, 333-351, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 212, Cambridge Univ. Press (1995)

[Ki06] W. Kimmerle, F. Luca, A. G. Raggi-Cárdenas, *Irreducible components and isomorphisms of the Burnside ring*, Preprint 2006

[Ma83] T. Matsuda *On the unit groups of Burnside rings*, Japan. J. Math. **8** (1982), no.1, 71-93

[Na] H. Nagao, Y. Tsushima, *Representations of finite groups*, Academic Press, 1988

[Ni76] D. M. Nicolson, *The orbit of the regular G-set under the full automorphism group of the Burnside ring of a finite group G*, J. Algebra **51** (1978), no.1, 288-299

[Ra04] A. G. Raggi-Cárdenas, L. Valero-Elizondo, *Normalizing isomorphisms between Burnside rings*, J. Algebra **277** (2004), no.2, 643-657

[Ra05] A. G. Raggi-Cárdenas, *Groups with isomorphic Burnside rings*, Arch. Math. **84** (2005), no.3, 193-197

[Sa66] A. I. Saksonov, *Certain integer-valued rings associated with a finite group*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **171** (1966), 529-532

[Sn] V. P. Snaith, *Explicit Brauer induction. With applications to algebra and number theory*, Cambridge University Press, 1994

[Th88] J. Thevenaz, *Isomorphic Burnside rings*, Com. Algebra **16** (1988), no. 9, 1945-1947

[Yo80] T. Yoshida, *Idempotents of Burnside rings and Dress induction theorem*, J. Algebra **80** (1983), no.1, 90-105